



Trabajos Fin de Máster 2023 de los alumnos  
de la Escuela de Estudios Superiores  
de la Armada



# REAL INSTITUTO Y OBSERVATORIO DE LA ARMADA EN SAN FERNANDO

BOLETIN ROA N° 1/2024



Trabajos Fin de Máster 2023 de los  
alumnos de la Escuela de Estudios  
Superiores de la Armada.



MINISTERIO DE DEFENSA



Catálogo de Publicaciones de Defensa  
<https://publicaciones.defensa.gob.es>



Catálogo de Publicaciones de la Administración General del Estado  
<https://cpage.mpr.gob.es>

**publicaciones.defensa.gob.es**  
**cpage.mpr.gob.es**

Edita:



Paseo de la Castellana 109, 28046 Madrid

© Autor y editor, 2024

NIPO 083-24-209-7 (edición impresa)

ISBN 978-84-9091-929-3 (edición impresa)

Depósito legal M 14835-2024

Boletín ROA, ISSN 1131-5040 (edición impresa)

NIPO 083-24-210-X (edición en línea)

Fecha de edición: junio de 2024

Maqueta e imprime: Imprenta Ministerio de Defensa

Las opiniones emitidas en esta publicación son de exclusiva responsabilidad del autor de la misma. Los derechos de explotación de esta obra están amparados por la Ley de Propiedad Intelectual. Ninguna de las partes de la misma puede ser reproducida, almacenada ni transmitida en ninguna forma ni por medio alguno, electrónico, mecánico o de grabación, incluido fotocopias, o por cualquier otra forma, sin permiso previo, expreso y por escrito de los titulares del copyright ©.

En esta edición se ha utilizado papel procedente de bosques gestionados de forma sostenible y fuentes controladas.

Foto portada:

Fachada del Edificio Principal del Real Instituto y Observatorio de la Armada en San Fernando (siglo XVIII).



# ÍNDICE

**Problema de dos cuerpos con fuerzas centrales.  
Aplicación en Astrodinámica.**

Teniente de Navío Rafael Carrillo Navarro..... 1

**Procesado de Imágenes de Superficies Acústicas  
mediante técnicas de Deep Learning.**

Teniente de Navío Pedro Luis Ortega Pérez..... 55



# **Problema de dos cuerpos con fuerzas centrales. Aplicación en Astrodinámica.**



**Rafael Carrillo Navarro**

Trabajo de fin de Máster  
Máster Universitario en Modelización e Investigación  
Matemática, Estadística y Computación  
Universidad de Zaragoza

Directores: Eva Tresaco Vidaller, Luca Piccotti  
16 de abril de 2024





# Prólogo

En la actualidad, el conocimiento de la astronomía cada vez se precisa más, no sólo por parte de entidades científicas o empresas dedicadas a este campo, si no también por los propios gobiernos de los diferentes países. Conocer el movimiento de cuerpos celestes suele ser de especial relevancia ¿Por qué ocurre esto? Entre otros motivos, la puesta en órbitas de satélites con diversas funciones como pudieran ser el estudio meteorológico de una zona concreta, el estudio del terreno de otro país o la posibilidad de obtener un posicionamiento preciso en cualquier parte del planeta son aspectos que cada vez ganan más interés. Entre los principales fines se encuentran el de disponer de información que proporcione ventaja en caso de posible conflicto entre dos Estados o proporcionar servicios mejorando la economía del país.

La Astronomía intenta explicar todo aquello que el ser humano, desde la Tierra, observa en el Universo. Entre otras muchas variantes, algunos científicos se centran en estudiar la teoría del *Big-Bang* y la creación del Universo, otros optan por buscar un futuro planeta con condiciones habitables, otros por el estudio de la basura espacial, y otros, como es el caso de este trabajo, en el movimiento de dos cuerpos que se encuentran en el espacio sometidos a un potencial central. Para ver este movimiento, se hará distinción, a lo largo de la memoria, entre potenciales keplerianos ( $U(r) \sim -\frac{1}{r}$ ), que gracias a la formulación de Johannes Kepler (1571-1630), previas observaciones de Tycho Brahe (1546-1601), fue el primer tipo de potencial gravitatorio estudiado; y los potenciales cuasi-keplerianos ( $U(r) \sim -\frac{1}{r} - \frac{\epsilon}{r^n}$ ,  $\forall n \geq 2 \in \mathbb{N}$ ), siendo estos últimos una alteración al primer tipo debido a diferentes perturbaciones.



# Resumen

El poner en órbita un satélite, una nave espacial o conocer cómo se mueven ciertos elementos que componen la basura espacial (cada vez más abundante) es algo que siempre ha estado presente para la ciencia y, por ende, para cualquier país. En este trabajo, principalmente se va a realizar un estudio cualitativo de los diferentes tipos de órbitas que describirá un cuerpo en función de su energía. Para ello se trabajará, en primer lugar, sobre el potencial gravitatorio kepleriano. También se realizará su reducción a la forma de un oscilador armónico mostrando cómo este tipo de problemas se puede modelar mediante una ecuación diferencial de orden dos. Se mostrará, de forma adicional, cómo son las hodógrafas correspondientes.

El problema kepleriano no se acerca del todo a la realidad pues no tiene en cuenta perturbaciones que se pueden encontrar cuando se estudia el movimiento de los cuerpos en el espacio. En este trabajo se estudiará perturbaciones del tipo  $1/r^n$  con  $n = 2$  y  $n = 3$ , que se conocen como potenciales de tipo Manev y Schwarzschild respectivamente. Estos potenciales aparecen para describir el efecto relativista en el movimiento de planetas [1], pero también en el estudio del potencial recíproco de dos cuerpos no esféricos, o en el estudio analítico del problema principal del satélite [2]. A lo largo del trabajo se analizará el potencial tipo Manev y Schwarzschild de forma similar a la realizada con el potencial kepleriano. Se verá cómo las órbitas acotadas, elípticas o circulares del problema de dos cuerpos, se transforman en órbitas rosetón o roseta. Además, se analizará bajo qué condiciones estas rosetas son cerradas, y finalmente se estudiará la precesión del ángulo del periastro para ambos potenciales perturbativos, para concluir obteniendo la conocida expresión de la precesión del perihelio de Mercurio.

*Palabras clave:* Fuerza central, Potencial efectivo, Precesión del periastro, Oscilador armónico, Hodógrafas



# Índice general

<b>Prólogo</b>	<b>3</b>
<b>Resumen</b>	<b>5</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>9</b>
1.1. Contexto histórico y estado del arte . . . . .	9
1.2. Objetivos, contexto científico y metodología . . . . .	12
1.3. Estructuración de la memoria . . . . .	12
<b>2. Sistemas keplerianos.</b>	<b>15</b>
2.1. Problema de dos cuerpos . . . . .	15
2.2. Integrales del movimiento y elementos orbitales . . . . .	17
2.3. Clasificación de trayectorias . . . . .	21
2.4. Reducción a la forma de un oscilador armónico forzado . . . . .	24
2.5. Representación de las hodógrafas orbitales . . . . .	26
<b>3. Sistemas cuasi-keplerianos</b>	<b>29</b>
3.1. Sistema cuasi-kepleriano tipo potencial de Manev . . . . .	29
3.1.1. Clasificación de trayectorias . . . . .	30
3.1.2. Variación de los elementos orbitales . . . . .	32
3.1.3. Reducción a la forma de un oscilador armónico forzado . . . . .	33
3.1.4. Órbitas rosetas cerradas . . . . .	35
3.1.5. Representación de la hodógrafa orbital . . . . .	36
3.2. Sistema cuasi-kepleriano tipo potencial de Schwarzschild . . . . .	36
3.2.1. Clasificación de trayectorias . . . . .	36
3.2.2. Variación de los elementos orbitales . . . . .	39
3.2.3. Reducción a la forma de un oscilador armónico forzado . . . . .	40
3.3. Precesión del periastro . . . . .	42
3.3.1. Precesión del perihelio de Mercurio . . . . .	43
<b>4. Conclusiones</b>	<b>45</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>47</b>
<b>A. Sistemas keplerianos perturbados. Variación de constantes</b>	<b>49</b>
<b>B. Oscilador armónico forzado</b>	<b>53</b>



# Capítulo 1

## Introducción

En este primer capítulo se va a comenzar realizando un breve recorrido de cómo ha ido evolucionando la concepción del espacio, la disposición y el movimiento de los cuerpos celestes a lo largo de la historia con la intención de poner en situación al lector. Se hablará también del estado del arte correspondiente al problema de los cuerpos de forma breve. Además, se presentará el contexto científico, se mostrarán los objetivos y se indicará la metodología seguida.

### 1.1. Contexto histórico y estado del arte

En el siglo IV a.C. personajes ilustres como Aristóteles pensaban que el universo era un Todo (Uno y Único) que tenía forma esférica y era finito. En concreto, se pensaba que la Tierra se encontraba en el centro de esta esfera. Este Todo estaba dividido por dos regiones, el *ámbito sublunar* que abarcaba desde el centro de la Tierra (o del universo) hasta la Luna (sin incluir), compuesto por los cuatro principales elementos (fuego, aire, tierra y agua), en el que predominaba la alteridad y donde el movimiento era rectilíneo; y el *ámbito supralunar* que abarcaba desde la Luna (incluida) hasta los confines del universo y en ella reinaba la uniformidad donde los cuerpos permanecían en su ser, y sin tener movimiento propio se desplazaban con movimiento circular uniforme debido a las esferas celestes concéntricas de éter en las que se encontraban [3].



Figura 1.1: Cosmología de Aristóteles.

Posteriormente, en el siglo III a.C., Aristarco de Samos fue el primer científico que, a partir de observaciones y de la lógica deductiva, propuso un primer modelo heliocéntrico, es decir, afirmaba que

el Sol se encontraba en el centro del universo y los planetas rotaban en torno a él [4].

El astrónomo Claudio Ptolomeo, en el siglo II, volvía a retomar el modelo geocéntrico propuesto por Aristóteles, sin embargo, a diferencia de éste, Ptolomeo afirmaba que las órbitas de los cuerpos celestes alrededor de la Tierra no eran simples circunferencias perfectas, si no que el movimiento venía compuesto por dos movimientos circulares tal como se puede apreciar en la figura 1.2 [5].

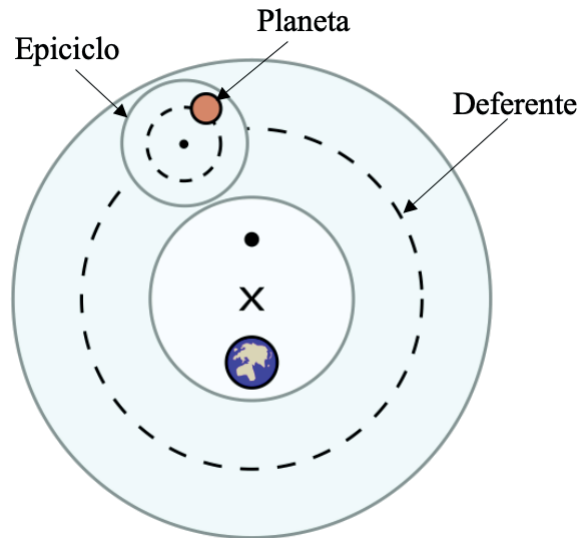


Figura 1.2: Movimiento de los astros según Ptolomeo [6].

Posteriormente, tras unos 1400 años en los que predominó el modelo geocéntrico, sobre el año 1543, Nicolás Copérnico volvió a retomar el modelo con el Sol en el centro del universo como ya hizo Aristarco de Samos. Copérnico supuso una revolución científica en este campo pues hizo una gran serie de aportaciones entre las que se encuentran que los movimientos de los astros son definidos, eternos y circulares; que el centro del Universo es un punto cercano al Sol; que los planetas giran en torno al Sol en forma circular; que la distancia Tierra-Sol es muy pequeña en comparación con la distancia a las estrellas fijas en el firmamento; o que el movimiento y rotación de la Tierra explica el movimiento de los planetas y la rotación de las estrellas. Es importante recalcar que pocos años después, el científico Galileo Galilei, basándose en el estudio copernicano, demuestra el modelo heliocéntrico de forma empírica a través de su telescopio. Además dio paso a las primeras leyes físicas sobre el movimiento de los cuerpos [5].

El astrónomo Tycho Brahe realizó una serie de observaciones que servirían de ayuda para que el científico Kepler elaborara tres leyes de movimiento de los planetas. Por otra parte, desacreditó una parte del modelo propuesto por Aristóteles como era la perfección e inmutabilidad de todo lo que se encontraba más allá de la Luna. Esto ocurrió porque en el año 1572 observó una nueva estrella (en realidad ahora se conoce que era una supernova<sup>1</sup>) y determinó que ésta permanecía siempre en la misma posición. Según Aristóteles no podía estar cercana a la Tierra, pues se movería, por lo que debería estar a una distancia lejana junto al resto de estrellas en ese espacio descrito como inmutable. ¿Pero si esa zona era inmutable, cómo era posible que apareciera una nueva estrella? Se demostraba, por lo tanto, que no era un espacio sin cambios como se pensaba. Llegó, además, a la misma conclusión intentando medir el paralaje de un cometa [4, 5, 7].

Gracias a las observaciones de Tycho Brahe, quien entonces era su discípulo, el astrónomo Johannes Kepler dedujo en el siglo XVII las tres leyes conocidas como *Leyes de Kepler*. No obstante, el significado físico se lo daría Isaac Newton a través de la *Ley de Gravitación Universal* en este mismo siglo. Esta nueva ley da cavidad al conocido como el problema de dos cuerpos a través del cual se puede comprobar cómo el movimiento de un cuerpo respecto a otro viene determinado, en general, por una curva cónica.

<sup>1</sup>Explosión cósmica masiva de una estrella que se da cuando se enfría y la presión que intenta hacerla más densa y compacta consigue vencer a la que ella misma genera emitiendo gas.



Estas órbitas, por lo tanto, pueden ser rectilíneas, circulares, elípticas, parabólicas o hiperbólicas [8].

El problema de dos cuerpos kepleriano no tiene en cuenta perturbaciones, sin embargo en la realidad hay una serie de alteraciones motivadas por aspectos como pueden ser, entre otras, la forma y volumen de estos cuerpos, o simplemente el hecho de que no estén solos en el espacio sintiéndose atraídos por otros ya que la *Ley de Gravitación Universal* marca que todo cuerpo con masa atrae en cierta medida al resto. Este problema se conoce como problema para potenciales cuasi-keplerianos.

A finales del siglo XVII y durante el siglo XVIII se da un salto importante en la evolución de la ciencia pues las observaciones con los nuevos telescopios se empieza a enlazar con la matemática teórica. Entre una importante cantidad de científicos que hacen ésto posible se encuentra Joseph Louis de Lagrange a través del cálculo de variaciones aplicado principalmente a los elementos orbitales. Además explicó el fenómeno conocido como *libración lunar*, resolvió una particularización del *problema de los Tres Cuerpos* y encontró los conocidos *puntos de Lagrange* entre otras aportaciones a la astronomía [5].

Otro científico importante fue Pierre Simon Laplace a través de la herramienta conocida como *Transformada de Laplace*, utilizada para la resolución de ecuaciones diferenciales. También fue capaz de incorporar el análisis estadístico y probabilístico a la astronomía, en concreto a las órbitas de los planetas, al movimiento de rotación de éstos y a la influencia que hacían los satélites sobre ellos. Intentó resolver los movimientos no explicados en su totalidad de Júpiter, Saturno y la Luna [5].

Durante el siglo XIX y principios del XX, el astrónomo Urbain Le Verrier, a través de una observación de Mercurio se percató de que la órbita de Mercurio no era una elipse cerrada<sup>2</sup>, no era siempre la misma, si no que se producía un arrastre del perihelio tal como puede verse en la figura 1.3 de forma esquemática y exagerada. Esta variación era de 574 segundos por siglo. Los astrónomos de la época lo justificaron por la presencia del resto de planetas que se encontraban en el espacio que hacían que esta elipse se desviara por el conjunto de diferentes atracciones que suponían, no obstante, al aplicar la teoría de Newton, sólo se demostró que la atracción de estos planetas explicaba 531 de los 574 segundos de arco por siglo [9].

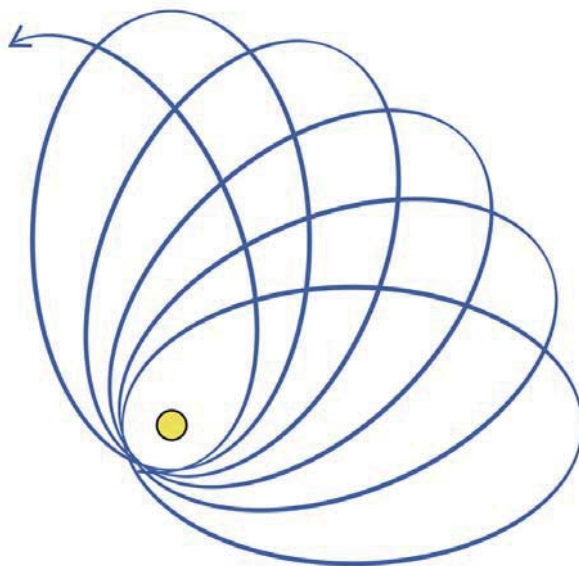


Figura 1.3: Esquema representativo de la precesión del perihelio de la órbita de Mercurio con respecto al Sol [10].

Para poder explicar los 43 segundos de arco por siglo restantes hay que hacer referencia a Albert Einstein, quien lo consiguió gracias a su *Teoría de la Relatividad General*. Si bien las fuerzas centrales son de la forma  $F(r) = -\nabla U(r)$ , es decir, sólo dependen de la distancia entre los cuerpos, el potencial

<sup>2</sup>Una órbita cerrada implica que después de un período completo, el cuerpo que está orbitando pasa exactamente por el mismo punto por el que pasó en el período anterior en ese instante.

$U(r)$  que según el problema kepleriano y conforme a la teoría de Newton era de la forma  $U(r) = \frac{-\mu}{r}$ , ahora aplicando este enfoque relativista pasa a ser de la forma  $U(r) = \frac{-\mu}{r} - \frac{\varepsilon}{r^n}$  con  $n \geq 2$  donde  $\varepsilon$  hace referencia a la magnitud de la perturbación. A este tipo de potenciales se le conocen como potenciales cuasi-keplerianos. Si  $n = 2$  se nombra como potencial tipo Manev, mientras que si  $n = 3$  como potencial tipo Schwarzschild [1]. Uno de los principales usos de este tipo de potenciales tiene lugar en el movimiento de satélites artificiales caracterizados por su no esfericidad como se puede ver en la referencia [2]. Este tipo de situaciones se deben resolver a través de métodos numéricos mediante el uso de intermediarios radiales<sup>3</sup>. Se hace referencia principalmente a dos tipos de intermediarios radiales, el de Cid en el que el Hamiltoniano incluye un término del tipo  $\frac{1}{r^3}$  y el de Deprit en el que se incluye uno de tipo  $\frac{1}{r^2}$  [1].

## 1.2. Objetivos, contexto científico y metodología

Los objetivos del presente trabajo son:

- Integración de las ecuaciones de movimiento del sistema kepleriano y de algunos de los sistemas cuasi-keplerianos.
- Estudio cualitativo, en ambos tipos de sistemas, de las órbitas generadas, es decir, la evolución temporal de los elementos orbitales que caracteriza la órbita como pueden ser el semieje mayor, excentricidad, etc.
- Reducción a la forma de un oscilador armónico para ambos tipos de sistemas.
- Representación de las curvas hodógrafas.
- Determinación de una órbita cerrada en sistemas cuasi-keplerianos.
- Cálculo de la precesión del periastro en sistemas cuasi-keplerianos. Aplicación al caso de Mercurio.

Este trabajo pondrá en práctica técnicas aprendidas durante el Máster Universitario en Modelización e Investigación Matemática, Estadística y Computación de la Universidad de Zaragoza, más concretamente hará uso de técnicas para resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) y sistemas dinámicos.

*Wolfram Mathematica* será la principal herramienta de apoyo utilizada para la computación de cálculos numéricos y analíticos, así como para la obtención de gráficas.

## 1.3. Estructuración de la memoria

Esta memoria consta de un resumen, en el que se expone qué se va a estudiar a lo largo del trabajo, tres capítulos principales, una serie de conclusiones, dos apéndices y la bibliografía.

- Capítulo 1 - En él se realizará una introducción mediante un contexto histórico junto al estado del arte. Se explicarán los objetivos y la metodología del trabajo así como el contexto científico. Además, se detallará la estructura de la memoria.
- Capítulo 2 - En él se proporcionará una serie de definiciones, como fuerza central o potencial efectivo, para posteriormente hacer uso de ellas. Se mostrarán las integrales de movimiento y los

<sup>3</sup>Aproximación al problema real y que refleja casi todas las propiedades del movimiento real.

elementos orbitales. Se integrarán las ecuaciones de movimiento para realizar el análisis cualitativo de los tipos de órbitas que puede describir un cuerpo determinado y se hará la reducción a la forma de un oscilador armónico además de la representación de la hodógrafa. Este capítulo hará referencia expresamente a los sistemas keplerianos.

- Capítulo 3 - En primer lugar se detallará con mayor profundidad a qué hacen referencia los sistemas cuasi-keplerianos, posteriormente se seguirá prácticamente el mismo guión que para los sistemas keplerianos pero aplicado al potencial tipo Manev y al tipo Schwarzschild. Se añadirá algún apartado, a mayores, como el cálculo de un  $\varepsilon$  determinado para que la órbita sea cerrada en el potencial tipo Manev o el análisis del potencial tipo Schwarzschild a través de una linealización del sistema dinámico no lineal. Además se mostrará la variación de los elementos orbitales, se detallará la expresión que hace referencia a la precesión de la órbita, en concreto para el potencial tipo Schwarzschild y se comprobará con la aplicación a la órbita de Mercurio.



## Capítulo 2

# Sistemas keplerianos.

### 2.1. Problema de dos cuerpos

La fuerza de atracción gravitatoria entre un planeta y el Sol, o entre un satélite artificial y la Tierra, es una fuerza central y conservativa. Se puede ver una representación en la figura 2.1<sup>4</sup> donde  $r$  es la distancia entre los dos cuerpos.

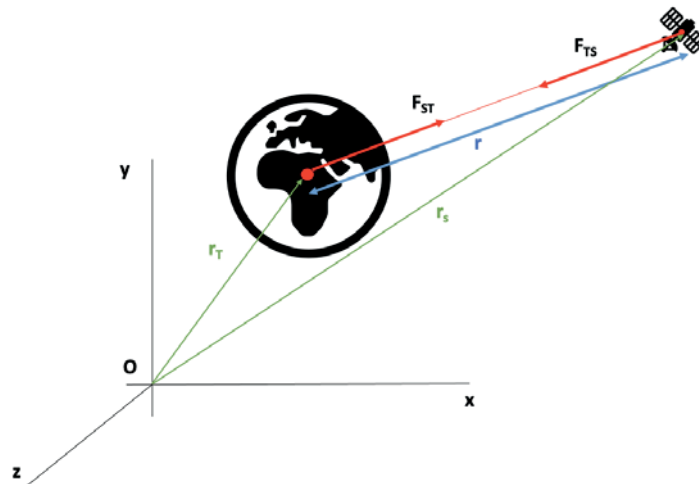


Figura 2.1: Esquema de fuerza central.

La ley de gravitación universal de Newton explica que la fuerza de atracción del Sol sobre un planeta lleva la dirección de los dos cuerpos y es proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de su distancia [8]

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\mathcal{G} \frac{Mm \mathbf{x}}{r^2 r}, \quad (2.1)$$

donde  $\mathbf{x}$  es el vector de posición relativa entre las masas de forma que  $r = \|\mathbf{x}\|$ , y  $\mathcal{G}$  es la constante de gravitación universal.

Es central, porque su dirección es en la línea que une los dos cuerpos. Además es conservativa porque el trabajo realizado por la fuerza para ir de un punto a otro no depende de la trayectoria seguida [11]. En consecuencia,  $\mathbf{F}$  es el gradiente de una función escalar, la función potencial dada por la expresión

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla_{\mathbf{r}} U(\mathbf{r}), \quad (2.2)$$

<sup>4</sup>Esta figura es simplemente representativa a modo de esquema. El satélite que aparece en la imagen se debe ver como un cuerpo esférico para que el problema a tratar sea un problema tipo kepleriano. Esto ocurre porque los satélites, al no tener una forma esférica, introducen las perturbaciones que se han nombrado en la sección 1.1.

Como  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  es en cada instante colineal con  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F(r) \cdot \mathbf{r}$ , entonces se puede escribir la relación entre la función potencial y la fuerza como  $F(r) = -\frac{dU(r)}{dr}$ .

Si se extiende la ley de Newton al movimiento de dos masas puntuales cualesquiera, se está ante el llamado problema de dos cuerpos.

Se considera un SR<sup>5</sup> inercial donde  $\mathbf{x}$  es el vector de la posición relativa de las masas  $m_1$  y  $m_2$ ;  $\mathbf{r}_1$  el vector de posición de  $m_1$  respecto al origen del SR; y  $\mathbf{r}_2$  el de la masa  $m_2$ . Como las masas se atraen bajo la ley de Newton, se tiene

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{12} &= \mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\mathbf{x}}{r}, \\ \mathbf{F}_{21} &= -\mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\mathbf{x}}{r}.\end{aligned}\quad (2.3)$$

Newton propuso, en su ecuación fundamental de la Mecánica, el concepto de fuerza como

$$\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}} = m\mathbf{a}.\quad (2.4)$$

Sustituyendo la ecuación (2.3) en la (2.4) se obtiene, para ambos cuerpos

$$\begin{aligned}\mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\mathbf{x}}{r} &= m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1, \\ -\mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\mathbf{x}}{r} &= m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2.\end{aligned}\quad (2.5)$$

A partir del sistema (2.5), se tiene que

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = 0,\quad (2.6)$$

si se integra dos veces esta última ecuación con respecto al tiempo se llega a

$$m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 = \mathbf{C}_1 \cdot t + \mathbf{C}_2.\quad (2.7)$$

Se puede apreciar que del sistema diferencial (2.5) cuyo orden es doce, se ha pasado, para el mismo problema, a la representación por la ecuación (2.7) cuyo orden es seis, quedando representada las seis constantes de integración a través de los vectores  $\mathbf{C}_1$  y  $\mathbf{C}_2$ . Posteriormente se reducirá el problema de dos cuerpos a un problema de un cuerpo, para ello se tiene que definir el vector ( $\mathbf{r}_c$ ) que va desde el origen hasta el centro de masa de los dos cuerpos de la forma [11]

$$\mathbf{r}_c = \frac{1}{m_1 + m_2} (m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2).\quad (2.8)$$

Ahora se reescribirá el sistema (2.5) teniendo en cuenta la definición del vector de centro de masas dado por la ecuación (2.8) y sabiendo que  $\mathbf{x}$  hace referencia al vector de posición relativo, es decir, es igual a  $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ . Queda, por lo tanto,

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1 &= \mathbf{r}_c - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{x}, \\ \mathbf{r}_2 &= \mathbf{r}_c + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{x}.\end{aligned}\quad (2.9)$$

Mediante estas ecuaciones se puede conocer la posición de los dos cuerpos simplemente conociendo cómo se mueve el centro de masas y el vector relativo entre ambos cuerpos.

El movimiento relativo se puede obtener derivando la ecuación dada por  $\mathbf{x} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$  obteniendo

$$\ddot{\mathbf{x}} = \ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_1,\quad (2.10)$$

sustituyendo en esta ecuación los vectores  $\ddot{\mathbf{r}}_1$  y  $\ddot{\mathbf{r}}_2$  tras despejar del sistema (2.5), se llega a

---

<sup>5</sup>Sistema de referencia

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\mathcal{G} \frac{m_1 \mathbf{x}}{r^2} - \mathcal{G} \frac{m_2 \mathbf{x}}{r^2} = -\mathcal{G} \frac{\mathbf{x}}{r^3} (m_1 + m_2), \quad (2.11)$$

que, definiendo la masa reducida como  $\mu = \mathcal{G} \cdot M = \mathcal{G}(m_1 + m_2)$ , donde  $M$  es la suma de las masas de los cuerpos, se obtiene la ecuación que describe el movimiento relativo de dos cuerpos

$$\ddot{\mathbf{x}} = \frac{-\mu}{r^3} \mathbf{x}. \quad (2.12)$$

## 2.2. Integrales del movimiento y elementos orbitales

La ecuación (2.12) se puede expresar como un sistema de ecuaciones diferenciales de orden uno de la forma

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}, \\ \dot{\mathbf{X}} = \frac{-\mu}{r^3} \mathbf{x}, \end{cases} \quad (2.13)$$

siendo  $\mathbf{X}$  el vector velocidad (figura 2.2):

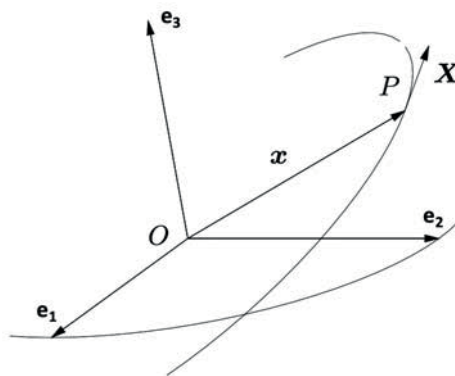


Figura 2.2: Movimiento orbital kepleriano en el sistema espacial  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  [12].

El *momento angular por unidad de masa* de un cuerpo, que se define con la letra  $\mathbf{G}$  viene determinado por

$$\mathbf{G} = \mathbf{x} \times \mathbf{X}. \quad (2.14)$$

Se va a demostrar a continuación cómo este momento angular  $\mathbf{G}$  es constante para los problemas keplerianos que se rigen por la ecuación (2.12). Se va a derivar la ecuación (2.14)

$$\dot{\mathbf{G}} = \dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{X} + \mathbf{x} \times \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{X} \times \mathbf{X} + \mathbf{x} \times \frac{-\mu}{r^3} \mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad (2.15)$$

quedando demostrada, en este caso, la conservación del momento angular. Esto indica que, por lo tanto, el movimiento de los dos cuerpos está restringido a un plano definido por  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{X}$ .

Posteriormente se definirá el *vector de Laplace* o también conocido como *vector Runge-Lenz* que en sistemas keplerianos es de la forma [8]

$$\mathbf{A} = \mathbf{X} \times \mathbf{G} - \frac{\mu}{r} \mathbf{x}. \quad (2.16)$$

Este vector tiene como propiedad que, bajo la ley de gravitación de Newton, es constante. Para demostrarlo se partirá de la derivada del vector de Laplace

$$\dot{\mathbf{A}} = \dot{\mathbf{X}} \times \mathbf{G} + \mathbf{X} \times \dot{\mathbf{G}} - \mu \left( \frac{\mathbf{X}r - \mathbf{x}\dot{r}}{r^2} \right) = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{x} \times (\mathbf{x} \times \mathbf{X}) - \mu \left( \frac{\mathbf{X}r - \mathbf{x}\dot{r}}{r^2} \right), \quad (2.17)$$

tras aplicar una de las propiedades del producto vectorial y sabiendo como ya se ha indicado anteriormente que  $r = \|\mathbf{x}\|$

$$\dot{\mathbf{A}} = -\frac{\mu}{r^3}(\mathbf{x}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{X}) - \mathbf{X}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})) - \frac{\mu}{r^2}(\mathbf{X}r - \mathbf{x}\dot{r}) = -\frac{\mu}{r^3}(\mathbf{x}(r\dot{r}) - \mathbf{X}r^2) - \frac{\mu}{r^2}(\mathbf{X}r - \mathbf{x}\dot{r}) = 0. \quad (2.18)$$

No sucederá lo mismo para los potenciales cuasi-kepleriano cuya fuerza es la kepleriana a la que se le añade una perturbación.

Las tres componentes del vector momento angular y las tres del de Laplace determinan seis constantes del movimiento, pero no son independientes entre sí, y por tanto, el sistema (2.13) no es integrable. Otra integral de movimiento, también dependiente de las anteriores es la energía. La definición de *energía por unidad de masa*,  $h$ , viene dada por [8]

$$h = \frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r}, \quad (2.19)$$

aunque también se puede encontrar dependiente del vector de Laplace y del momento angular

$$h = \frac{A^2 - \mu^2}{2G^2}. \quad (2.20)$$

Se puede comprobar que es constante derivando la expresión (2.19)

$$\dot{h} = \mathbf{X}\dot{\mathbf{X}} + \frac{\mu}{r^2}\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{X}\dot{\mathbf{X}} + \frac{\mu}{r^3}\mathbf{X}\mathbf{x} = \mathbf{X} \left( \dot{\mathbf{X}} + \frac{\mu}{r^3}\mathbf{x} \right) \stackrel{ec.(2.13)}{=} \mathbf{X} \left( -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{x} + \frac{\mu}{r^3}\mathbf{x} \right) = 0. \quad (2.21)$$

Observar que si  $\mathbf{G} \neq 0$  el movimiento es instantáneamente plano, plano definido por los vectores posición  $\mathbf{x}$  y velocidad  $\mathbf{X}$ . Además se verifica que  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{G} = 0$  lo que implica que  $\mathbf{A}$  pertenece al plano de movimiento. A partir de la relación  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = G^2 - \mu r$  y denotando  $f$  al ángulo entre el vector posición  $\mathbf{x}$  y el de Laplace  $\mathbf{A}$  dando lugar a  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = Ar \cos f$ , se llega a la ecuación que se muestra a continuación de una curva cónica [8].

$$r = \frac{G^2/\mu}{1 + A/\mu \cos f}. \quad (2.22)$$

Esta ecuación representa el movimiento de un cuerpo en un campo newtoniano.

Por otro lado, se define el elemento orbital *excentricidad* de la forma  $e = \frac{A}{\mu}$ . También se definirá el *semilatus rectum* a partir de  $p = \frac{G^2}{\mu}$ . Teniendo en cuenta estos cambios, la ecuación (2.22) queda de la forma

$$r = \frac{p}{1 + e \cos f}. \quad (2.23)$$

Como la ecuación (2.22) representa una cónica de excentricidad  $A/\mu$ , entonces si  $A < \mu$  la órbita describe un movimiento elíptico, en este caso  $h < 0$ . Cuando  $A = 0$  la órbita será circular manteniéndose la energía por unidad de masa negativa. Se da el caso de órbita parabólica cuando  $A = \mu$ , y por tanto,  $h = 0$ . Por último, el movimiento descrito será hiperbólico cuando  $A > \mu \Rightarrow h > 0$  [8].

Otro de los elementos orbitales importantes es el *semieje mayor* ( $a$ ) de la órbita que se puede definir para una elipse como

$$a = \frac{p}{1 - e^2}. \quad (2.24)$$

El vector de Laplace indica la dirección en la que el cuerpo alcanza la máxima y la mínima distancia con respecto al otro cuerpo. A la posición de mínima distancia se le conoce como *periastro*, y a la de máxima como *apoaastro*. Si el foco es el Sol se habla de *perihelio* y *afelio*. Estas distancias vienen dadas a partir de la ecuación (2.23) con  $f = 0$  y  $f = \pi$  dando lugar a



$$\begin{aligned} r_p &= a(1 - e), \\ r_a &= a(1 + e). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Las variables  $a$  y  $e$  caracterizan la forma de la cónica. Para describir completamente una órbita en el espacio se necesitan cuatro elementos orbitales más [12], que son:

- Inclínación de la órbita ( $i$ ): ángulo entre el plano  $O_{xy}$  del SR espacial inercial y el plano de movimiento o de la órbita (perpendicular al vector  $\mathbf{G}$ ).
- Ángulo del nodo ( $\Omega$ ): ángulo entre  $\mathbf{e}_1$  y la línea de los nodos (intersección del plano de la órbita y el plano  $O_{xy}$ )
- Argumento del periastro ( $\omega$ ): ángulo definido entre la línea de nodos y la línea de los ápsides (en la dirección del vector de Laplace).
- Época de paso por el periastro ( $T$ ): época en la que el cuerpo pasa por la posición de mínima distancia. Este elemento puede ser reemplazado por la anomalía media ( $M$ ).

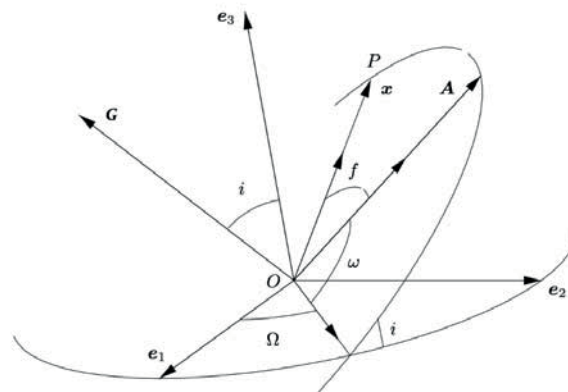


Figura 2.3: Elementos orbitales.

El sistema espacial es un sistema de referencia inercial, para estudiar el movimiento del cuerpo es conveniente usar un sistema de referencia móvil. Así se introduce el sistema orbital  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{n}$  donde  $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{x}}{r}$ ,  $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{G}}{G}$  y  $\mathbf{v} = \mathbf{n} \times \mathbf{u}$ . Mediante 3 giros de ángulos  $\Omega$ ,  $i$ ,  $\omega + f$  se puede expresar estos vectores en función de las del sistema espacial  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{e}_3$  (ver ecuación (9.18) de la referencia [12]). Si se tiene en cuenta un sistema de referencia ortonormal  $\mathbf{p}_1$ ,  $\mathbf{p}_2$ ,  $\mathbf{n}$  de forma que  $\mathbf{p}_1$  y  $\mathbf{p}_2$  sean constantes y teniendo en cuenta la figura 2.4,

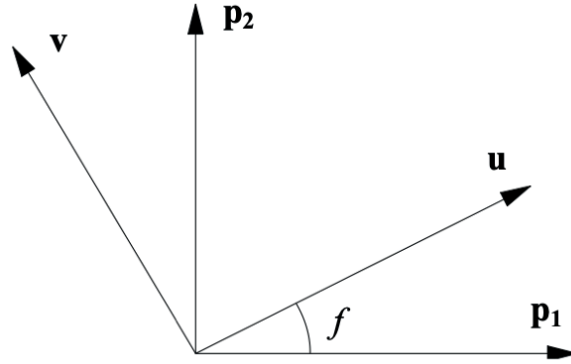


Figura 2.4: Sistema de referencia orbital en el plano [12].

se puede obtener la relación

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}} = \dot{f}\mathbf{v}, \\ \dot{\mathbf{v}} = -\dot{f}\mathbf{u}, \end{cases} \quad (2.26)$$

por lo tanto, se pueden escribir las ecuaciones del movimiento (2.13) como

$$\begin{cases} \mathbf{x} = r\mathbf{u}, \\ \mathbf{X} = \dot{r}\mathbf{u} + r\dot{f}\mathbf{v}. \end{cases} \quad (2.27)$$

Si ahora se expresa el momento angular  $\mathbf{G}$  en el sistema orbital, se obtiene

$$\mathbf{G} = \mathbf{x} \times \mathbf{X} = r\mathbf{u} \times (\dot{r}\mathbf{u} + r\dot{f}\mathbf{v}) = \begin{vmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{n} \\ r & 0 & 0 \\ \dot{r} & r\dot{f} & 0 \end{vmatrix} = r^2\dot{f}\mathbf{n}, \quad (2.28)$$

por lo que

$$G = r^2\dot{f} \Rightarrow \dot{f} = \frac{G}{r^2}. \quad (2.29)$$

Las ecuaciones del movimiento relativo o kepleriano también se pueden obtener mediante las ecuaciones de Hamilton aplicadas al hamiltoniano kepleriano [12]:

$$\mathcal{H}_k(\mathbf{x}, \mathbf{X}) = \frac{1}{2}\mathbf{X} \cdot \mathbf{X} - \frac{\mu}{r}, \quad (2.30)$$

donde  $\mathbf{x}$  hace referencia a las coordenadas y  $\mathbf{X}$  a los momentos, obteniendo, nuevamente

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \nabla_{\mathbf{X}}\mathcal{H}_k = \mathbf{X}, \\ \dot{\mathbf{X}} = -\nabla_{\mathbf{x}}\mathcal{H}_k = \frac{-\mu}{r^3}\mathbf{x}. \end{cases} \quad (2.31)$$

Para la integración de las ecuaciones del movimiento se utilizarán las ecuaciones de Hamilton expresadas en variables polares-nodales [12]. Estas variables se denotan  $(r, \theta, \nu, R, \Theta, N)$  y se definen mediante  $\theta = w + f$ ,  $\nu = \Omega$ ,  $R = \dot{r}$ ,  $\Theta = G$ ,  $N = G \cos i$ .

El hamiltoniano kepleriano en estas variables es:

$$\mathcal{H}_k = \frac{1}{2}\left(R^2 + \frac{\Theta^2}{r^2}\right) - \frac{\mu}{r}, \quad (2.32)$$

y las ecuaciones de Hamilton quedan:

$$\begin{aligned}
 \dot{R} &= -\frac{\partial \mathcal{H}_k}{\partial r} = \frac{\Theta^2}{r^3} - \frac{\mu}{r^2}, \\
 \dot{\Theta} &= -\frac{\partial \mathcal{H}_k}{\partial \theta} = 0, \\
 \dot{r} &= \frac{\partial \mathcal{H}_k}{\partial R} = R, \\
 \dot{\theta} &= \frac{\partial \mathcal{H}_k}{\partial \Theta} = \frac{\Theta}{r^2}.
 \end{aligned}
 \tag{2.33}$$

Como el sistema es autónomo (sin dependencia explícita del tiempo) y las fuerzas que intervienen derivan de un potencial conservativo, el hamiltoniano es una integral del movimiento y su valor coincide con la energía total del sistema [13].

### 2.3. Clasificación de trayectorias

La ley de conservación de la energía permite un análisis cualitativo del movimiento. Para ello se fijará un valor del momento angular, y un nivel de energía determinado.

Teniendo en cuenta la ecuación (2.19) y tomando la velocidad de las ecuaciones de movimiento relativo del sistema de referencia orbital (2.27), se obtiene el valor de la energía de la forma

$$h = \frac{1}{2}[\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2] - \frac{\mu}{r} \stackrel{ec.(2.29)}{=} \frac{1}{2}[\dot{r}^2 + \frac{G^2}{r^2}] - \frac{\mu}{r},
 \tag{2.34}$$

Se definirá el potencial efectivo como la suma del potencial físico (términos que solo dependen de la distancia) y de un potencial centrífugo  $\left(\frac{G^2}{2r^2}\right)$  también conocido a veces como potencial ficticio o barrera centrífuga [11, 13].

$$U_{eff}(r) = \frac{G^2}{2r^2} + U(r).
 \tag{2.35}$$

Para el caso kepleriano, el que se está abordando en este apartado, el potencial (físico) es de la forma  $U(r) = \frac{-\mu}{r}$ . Se pueden ver los diferentes potenciales en función de la distancia  $r$  representados en la figura 2.5 donde se ha tomado la masa del cuerpo y momento angular unidad.

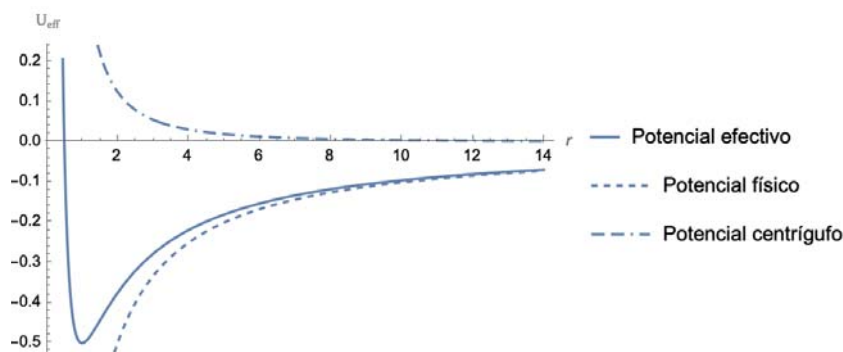


Figura 2.5: Potencial efectivo sistema kepleriano.

Si se vuelve a la última ecuación de la energía (2.34), estableciendo el potencial efectivo se llega a

$$h = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + U_{eff}(r).
 \tag{2.36}$$

Como el término  $\frac{1}{2}\dot{r}^2$  siempre es positivo, para que exista movimiento del cuerpo se debe cumplir que

$$h - U_{eff}(r) \geq 0. \quad (2.37)$$

Para hacer el análisis cualitativo anteriormente mencionado, serán de especial importancia las ecuaciones (2.36) y (2.37).

■ **Órbita acotada circular.**

Esta órbita tendrá lugar cuando la energía sea la mínima posible para que haya movimiento del cuerpo, es decir, cuando el potencial efectivo sea mínimo. Para saber cuándo se da este caso se derivará este potencial efectivo y se igualará a cero para sacar el valor del radio obteniendo

$$\frac{dU_{eff}(r)}{dr} = 0 \Rightarrow -\frac{G^2}{r^3} + \frac{\mu}{r^2} = 0 \Rightarrow r = \frac{G^2}{\mu} = p. \quad (2.38)$$

Cuando el cuerpo se encuentra a una distancia determinada  $r = p$  la ecuación (2.37) se cumple para un único punto generando una órbita circular. La energía del cuerpo coincide con el valor del potencial efectivo. Si el extremo del potencial efectivo es un máximo, la órbita será inestable, mientras que si el extremo es un mínimo, será estable, que es lo que ocurre en este caso.

En la figura 2.6 se muestra la energía junto al potencial efectivo y se puede apreciar cómo ésta es la mínima posible para que exista movimiento. La única solución para que se cumpla la ecuación (2.37), como se ha nombrado antes, es el punto  $r = p = 1$  (punto representado de color verde).

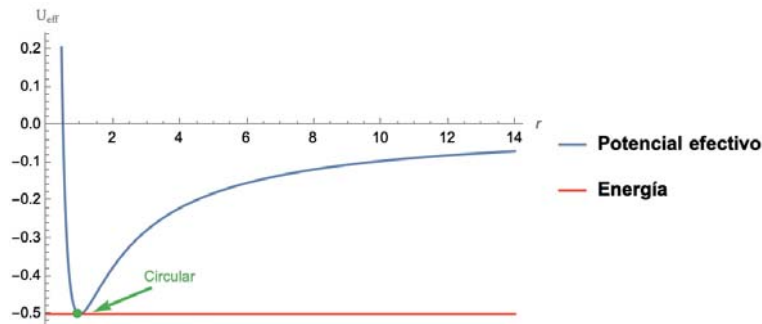


Figura 2.6: Energía de órbita circular en sistema kepleriano ( $\mu = 1, G = 1$ ).

La integración de las ecuaciones de movimiento en coordenadas cartesianas o polares a través de *Wolfram Matemática* se puede ver en la figura 2.7, que efectivamente muestra una órbita circular cuyo radio es  $r = 1$ .

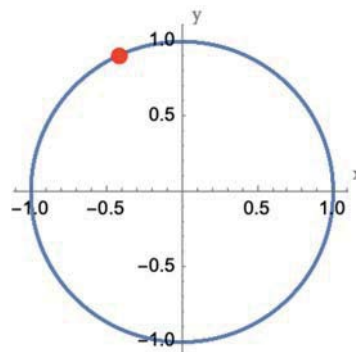


Figura 2.7: Cuerpo orbitando en trayectoria circular [Potencial kepleriano].

Si se considera el cuerpo con una energía diferente se pueden obtener órbitas acotadas diferentes u órbitas abiertas.

■ **Órbita acotada elíptica**

La trayectoria del cuerpo correspondiente a un valor de  $h < 0$ , está acotada, como puede verse en la figura 2.8. A diferencia de la órbita circular ahora la región permitida no es únicamente un punto, si no que es la zona acotada por los dos valores dados por la intersección del potencial efectivo y la energía ( $\dot{r} = 0$ ). Estos radios corresponden a los puntos de máxima y mínima distancia de la órbita. A partir de la ecuación (2.34) se puede obtener

$$hr^2 - \frac{G^2}{2} + \mu r = 0. \tag{2.39}$$

Resolviéndola y utilizando las relaciones entre el momento angular y la energía de una órbita elíptica, con el semieje mayor y la excentricidad orbital se llega a que estas raíces corresponden a  $r = a(1 \pm e)$ . El cuerpo se mantendrá orbitando entre estos dos valores describiendo una órbita cerrada elíptica.

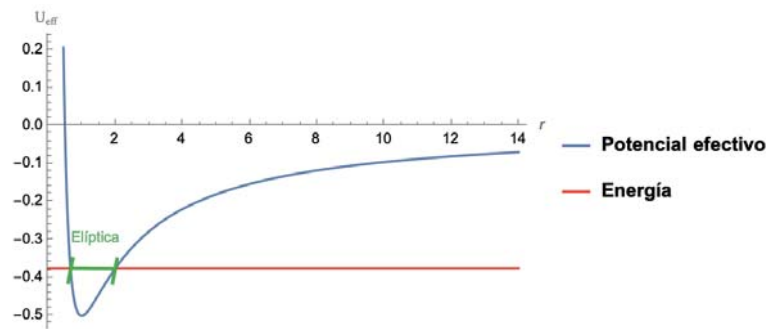


Figura 2.8: Energía de órbita elíptica en sistema kepleriano.

Tras hacerse la integración de las ecuaciones de movimiento tal como se hizo para la órbita circular se obtiene, efectivamente la órbita elíptica comentada (véase la figura 2.9).

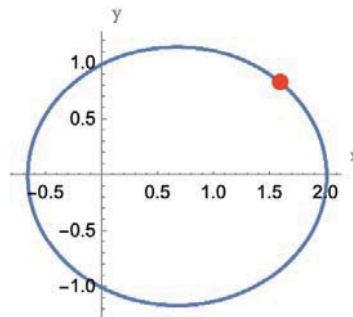


Figura 2.9: Cuerpo orbitando en trayectoria elíptica [Potencial kepleriano].

Para una órbita de condiciones iniciales ( $x_0 = 2, y_0 = 0, \dot{x}_0 = 0, \dot{y}_0 = 1/2$ ) como la representada en la figura 2.9 se puede comprobar con las ecuaciones de la sección 2.2 que sus parámetros

orbitales son  $a = 4/3$  y  $e = 1/2$ , siendo por lo tanto las distancias al periastro y apoastro de  $2/3$  y  $2$  respectivamente.

Como se puede observar, estos valores corresponden a la intersección de la energía con el potencial efectivo ( $r_1$  y  $r_2$ ) en la figura 2.8 y también con el máximo alejamiento y acercamiento del cuerpo en la órbita elíptica mostrada en la figura 2.9.

### ■ Órbita no acotada

Para valores de la energía  $h \geq 0$  el movimiento del cuerpo es de tipo hiperbólico ( $h > 0$ ) o parabólico ( $h = 0$ ). Esto se puede ver representado en la figura 2.10. El significado que representa la figura es que un cuerpo con esta energía que se aproxima a un potencial gravitatorio (débil en relación con la energía del cuerpo, pues cero ya es una energía elevada) choca contra la barrera centrífuga (justo en el punto de retroceso marcado de color violeta) y vuelve sin quedar retenido<sup>6</sup> por el potencial gravitatorio.

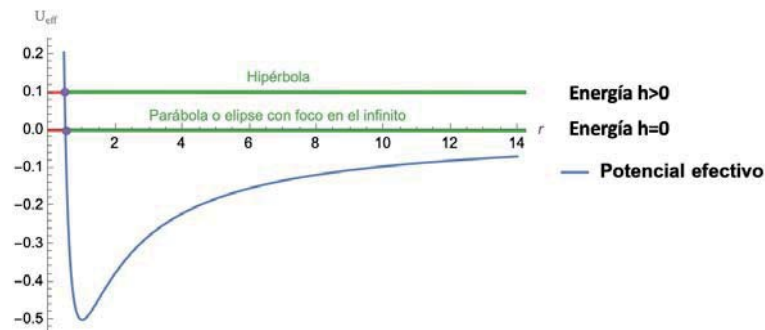


Figura 2.10: Energía de órbita no acotada en sistema kepleriano.

La clasificación de los distintos tipos de órbitas como acotadas, circulares y abiertas no es válida para todos los potenciales atractivos. En el capítulo siguiente se verán algunos potenciales del tipo  $U(r) = \frac{1}{r^n}$  con  $n \geq 2$  donde se observará cómo cambia el comportamiento del cuerpo para distancias próximas a cero.

## 2.4. Reducción a la forma de un oscilador armónico forzado

En este tipo de problemas se puede hacer una reducción a la forma de un oscilador armónico forzado, es decir, se pueden expresar las ecuaciones de movimiento del cuerpo en el campo potencial gravitatorio mediante la ecuación que rige el movimiento de un oscilador armónico forzado. Lo primero que se hará será calcular la ecuación de la órbita para el problema presente. Volviendo a la ecuación (2.34) de la energía y despejando  $\dot{r}$  se obtiene la expresión

$$\dot{r} = \sqrt{2(h - U(r)) - \frac{G^2}{r^2}}. \quad (2.40)$$

La ecuación de la órbita viene dada por  $r(f)$ . Teniendo en cuenta la última ecuación, pues  $\frac{dr}{dt} = \dot{r}$  y la ecuación (2.29) donde  $\frac{df}{dt} = \dot{f} = \frac{G}{r^2}$ , se obtiene

<sup>6</sup>Realmente quedaría retenida en el infinito. Es decir, en el infinito formaría una elipse. Se recuerda al lector que una elipse con un foco en el infinito es una parábola, que justamente coincide con la órbita que describe el cuerpo para esta energía.

$$\frac{dr}{df} = \frac{\sqrt{2(h - U(r)) - \frac{G^2}{r^2}}}{G/r^2}, \quad (2.41)$$

ecuación diferencial ordinaria que se puede resolver por separación de variables de forma que

$$df = \frac{G/r^2}{\sqrt{2(h - U(r)) - \frac{G^2}{r^2}}} dr. \quad (2.42)$$

Se integra a ambos lados de la igualdad obteniendo el incremento angular

$$f - f_0 = \int \frac{G/r^2}{\sqrt{2(h - U(r)) - \frac{G^2}{r^2}}} dr. \quad (2.43)$$

Esta integral no resulta fácil de integrar analíticamente. Sin embargo, para potenciales centrales del tipo  $U(r) = r^n$  se puede resolver la integral (2.43) con funciones trigonométricas para  $n = -1$ ,  $n = -2$  y con integrales elípticas para  $n = -3$  y  $n = -4$ . En este caso,  $n = -1$ , se puede resolver obteniendo la ecuación de la órbita (2.23). Para ello se utilizará el siguiente cambio de variable ( $u = \frac{1}{r}$ ,  $du = -\frac{1}{r^2} dr$ ), que sustituyendo

$$f - f_0 = -G \int \frac{du}{\sqrt{2h + 2\mu u - G^2 u^2}}, \quad (2.44)$$

para simplificar se denominará  $K^2 = \frac{2h}{G^2} - \frac{\mu^2}{G^4}$  quedando la ecuación

$$f - f_0 = \int \frac{-du}{\sqrt{-\left(u - \frac{\mu}{G^2}\right)^2 + K^2}} = \arccos\left(\frac{u - \frac{\mu}{G^2}}{K}\right), \quad (2.45)$$

haciendo el coseno a ambos lados de la igualdad y deshaciendo el cambio de variable  $u$  y  $K$ , se llega a

$$\cos(f - f_0) = \frac{\frac{1}{r} - \frac{\mu}{G^2}}{\sqrt{\frac{2h}{G^2} - \frac{\mu^2}{G^4}}}, \quad (2.46)$$

por último, tomando sin pérdida de generalidad  $f_0 = 0$ , multiplicando por  $\frac{G^2}{\mu}$  ( $= p$ ) y denominando  $e = \sqrt{\frac{2hG^2}{\mu^2} + 1}$  se obtiene la ecuación de la órbita (2.23):

$$r = \frac{\frac{G^2}{\mu}}{1 + \cos f \sqrt{\frac{2hG^2}{\mu^2} + 1}} \Rightarrow r = \frac{p}{1 + e \cos f}. \quad (2.47)$$

Esta última expresión demuestra que se ha llegado por formas diferentes a la ecuación general de una cónica. Es importante recalcar que, en este caso, las órbitas son cerradas<sup>7</sup> a diferencia de como se verá en los sistemas cuasi-keplerianos. Para el problema kepleriano se aprecia que  $r(f) = r(f + 2k\pi)$  con  $k \in \mathbb{N}$  debido a que  $\cos f = \cos(f + 2k\pi)$  con  $k \in \mathbb{N}$ .

Ahora sí, se pasará a hacer la reducción a la forma del oscilador armónico forzado partiendo de la ecuación (2.41) reescrita de la forma

<sup>7</sup>Las leyes de Kepler están enunciadas para el movimiento de planetas para los cuales las órbitas son elípticas, sin embargo, la ecuación de la cónica permite órbitas no cerradas (parábolas o hipérbolas).

$$\frac{dr}{df} = \frac{r^2}{G} \sqrt{2(h - U(r)) - \frac{G^2}{r^2}}. \quad (2.48)$$

Se aplicará a continuación la conocida *Transformación de Binet* [14] que implica un cambio de variable de la forma  $r = 1/u$  como el que se vió anteriormente,

$$-\frac{1}{r^2} \frac{du}{df} = \frac{1}{G r^2} \sqrt{2(h + \mu u) - G^2 u^2} \Rightarrow \frac{du}{df} = \frac{-1}{G} \sqrt{2(h + \mu u) - G^2 u^2}. \quad (2.49)$$

Posteriormente se denota  $u' = \frac{du}{df}$  y se eleva ambos lados de la igualdad al cuadrado

$$(u')^2 = \frac{1}{G^2} [2(h + \mu u) - G^2 u^2] \Rightarrow (u')^2 = \frac{2h}{G^2} + \frac{2\mu u}{G^2} - u^2, \quad (2.50)$$

se vuelve a hacer la derivada de  $u$  con respecto a  $f$ ,

$$2u' u'' = \frac{2\mu'}{G^2} - 2u' u \Rightarrow u'' + u = \frac{\mu}{G^2}. \quad (2.51)$$

Se llega, por lo tanto, como se había indicado a una ecuación diferencial ordinaria de orden dos con coeficientes constantes de la forma de una ecuación de un oscilador armónico forzado  $mx'' + kx = F(t)$  donde  $m = k = 1$  y  $F(t) = \frac{\mu}{G^2}$ .

La solución a esta ecuación diferencial puede escribirse de la forma

$$u = A \cos(f - f_0) + \frac{\mu}{G^2}. \quad (2.52)$$

Ahora se deshace el cambio  $u = \frac{1}{r}$ ,

$$\frac{1}{r} = A \cos(f - f_0) + \frac{\mu}{G^2} = \frac{\mu}{G^2} (e \cos(f - f_0) + 1), \quad (2.53)$$

es decir,

$$r = \frac{\frac{G^2}{\mu}}{e \cos(f - f_0) + 1}, \quad (2.54)$$

con  $e = \sqrt{1 + \frac{2G^2 h}{\mu^2}}$ .

Tomando sin pérdida de generalidad  $f_0 = 0$ , y sustituyendo  $p = \frac{G^2}{\mu}$  se obtiene de nuevo la ecuación de la órbita

$$r = \frac{p}{e \cos f + 1}. \quad (2.55)$$

Como se quería demostrar, se llega a la misma ecuación (2.47) de la cónica pero a través de la reducción a un oscilador armónico forzado.

## 2.5. Representación de las hodógrafas orbitales

Una curva hodógrafa está descrita por el vector velocidad de un cuerpo que está en órbita, también se conoce como diagrama de velocidad y es de especial importancia en astronomía para transferencias orbitales entre otras aplicaciones [15]. Sin entrar en mayor detalle se deducirá la forma que pueden tener, para este caso (problema kepleriano), y se realizará la posterior representación gráfica.

Se partirá de la ecuación de la curva cónica genérica ya vista en la expresión (2.23) y que se vuelve a mostrar a continuación



$$r = \frac{p}{1 + e \cos f}. \quad (2.56)$$

Por otra parte, del cambio de coordenadas cartesianas a polares se tiene la posición del cuerpo mediante

$$\begin{cases} x = r \cos f, \\ y = r \sin f. \end{cases} \quad (2.57)$$

Ahora se calculan las derivadas respecto al tiempo, obteniendo las componentes de la velocidad del propio cuerpo

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \cos f - r(\sin f)\dot{f}, \\ \dot{y} = \dot{r} \sin f + r(\cos f)\dot{f}. \end{cases} \quad (2.58)$$

Si se realiza la derivada de la ecuación cónica (2.56)

$$\dot{r} = \frac{pe(\sin f)\dot{f}}{(1 + e \cos f)^2}, \quad (2.59)$$

introduciendo ahora las ecuaciones (2.56) y (2.59) en la primera ecuación de (2.58) se llega a

$$\dot{x} = -\frac{p}{(1 + e \cos f)^2}(\sin f)\dot{f} \stackrel{ec.(2.56)}{=} -\frac{r^2}{p}\dot{f} \sin f. \quad (2.60)$$

Realizando lo mismo para la otra componente de la ecuación (2.58) queda

$$\dot{y} = \frac{r^2}{p}\dot{f}(\cos(f) + e). \quad (2.61)$$

La velocidad del cuerpo, por lo tanto, se puede expresar de la forma siguiente

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{r^2}{p}\dot{f} \sin f, \\ \dot{y} = \frac{r^2}{p}\dot{f}(\cos(f) + e). \end{cases} \quad (2.62)$$

Se puede apreciar perfectamente que la hodógrafa es una circunferencia

$$\left(\frac{-r^2\dot{f}}{p} \sin f\right)^2 + \left(\frac{r^2\dot{f}}{p} \cos f + \frac{r^2\dot{f}e}{p}\right)^2 = \left(\frac{r^2\dot{f}}{p}\right)^2. \quad (2.63)$$

Si se tiene en cuenta la definición del momento angular vista en la ecuación (2.29) y la definición del *semilatus rectum* introducida en el apartado 2.2

$$\left(-\frac{\mu}{G} \sin f\right)^2 + \left(\frac{\mu}{G} \cos f + \frac{\mu e}{G}\right)^2 = \left(\frac{\mu}{G}\right)^2, \quad (2.64)$$

es decir, el radio y el centro de la circunferencia son respectivamente  $\left(\frac{\mu}{G}\right)$  y  $\left(0, -\frac{\mu e}{G}\right)$ . En la figura 2.11 se observa la hodógrafa de una órbita elíptica para valores de  $\mu = 1$ ,  $G = 1$  y excentricidad  $1/2$ .

Se puede contemplar como el radio es 1 y el centro se encuentra en  $(0, -1/2)$ , lo que corresponde a los valores de la circunferencia dada en la ecuación 2.64.

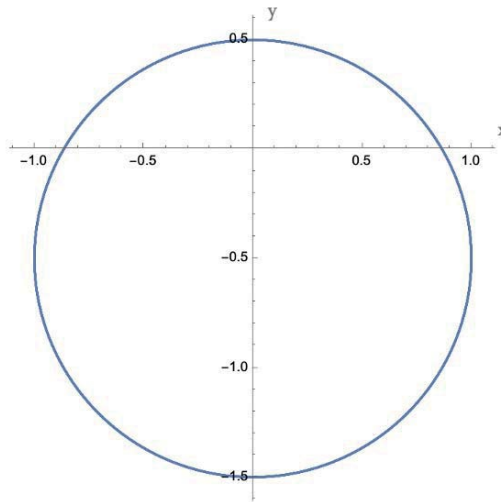


Figura 2.11: Hodógrafa de órbita elíptica en caso kepleriano.

## Capítulo 3

# Sistemas cuasi-keplerianos

Como ya se ha comentado en la introducción, el problema kepleriano no se acerca del todo a la realidad pues no tiene en cuenta perturbaciones que sí se pueden encontrar cuando se estudia el movimiento de los cuerpos en el espacio.

En este apartado se van a tratar dos tipos de perturbaciones al movimiento kepleriano. La primera perturbación a estudiar genera un potencial atractivo de la forma  $U(r) = -\frac{\mu}{r} - \frac{\varepsilon}{r^2}$  y se conoce como potencial tipo Manev. La segunda que se va a estudiar genera un potencial atractivo  $U(r) = -\frac{\mu}{r} - \frac{\varepsilon}{r^3}$  y es conocido como potencial tipo Schwarzschild [1].

Esta es una de las tantas perturbaciones que influyen a la hora de estudiar el movimiento de un cuerpo celeste y viene motivado por el descubrimiento de la *Teoría de la Relatividad General* de Albert Einstein. No obstante, el primer caso del que se tuvo constancia fue a través de Newton quien consideró explicar las desviaciones en la órbita de la Luna mediante un potencial kepleriano al que se le añadía una perturbación pasando de una órbita elíptica pura a una órbita con elipses que iban girando de tal forma que generaba una órbita tipo roseta [1].

El nombre de *sistemas cuasi-keplerianos* en sí fue introducido por Deprit para referirse a aquellos sistemas keplerianos que se encontraban perturbados por una fuerza radial inversamente proporcional al cubo de la distancia derivada, por lo tanto, de un potencial perturbador inversamente proporcional al cuadrado de la distancia [16].

En concreto los potenciales tipo Manev y Schwarzschild fueron introducidos para describir el movimiento secular del perihelio de Mercurio [1].

Este tipo de potenciales cuasi-keplerianos se usarán dentro de la *Teoría de Satélites Artificiales* cuando únicamente se considera el achatamiento de la Tierra, en concreto el segundo armónico zonal del potencial (coeficiente J2). El estudio analítico de este potencial perturbado no siempre es sencillo, de ahí que nazcan los intermediarios radiales, tanto el obtenido por Deprit (para potenciales tipo Manev) como el obtenido por Cid (potenciales tipo Schwarzschild), cuyo interés radica en realizar una serie de simplificaciones al hamiltoniano eliminando algunas variables y pudiendo dar una solución aproximada [1] (véase el apéndice A).

### 3.1. Sistema cuasi-kepleriano tipo potencial de Manev

En primer lugar se propone un sistema cuasi-kepleriano con fuerzas de tipo Manev de manera que la fuerza tenga la siguiente forma

$$F(r) = \left( -\frac{\mu}{r^2} - \frac{2\varepsilon}{r^3} \right). \quad (3.1)$$

Observar que su hamiltoniano es el que se muestra en la ecuación (3.2), que es conservativo. Además, al igual que en el caso kepleriano, el ángulo  $f$  es cíclico y el momento angular  $G (= \Theta)$  se conserva por lo que el movimiento será plano.

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left( R^2 + \frac{\Theta^2}{r^2} \right) - \frac{\mu}{r} - \frac{\varepsilon}{r^2}. \quad (3.2)$$

A continuación se va a hacer un estudio de las trayectorias siguiendo el mismo esquema seguido para el potencial kepleriano en el capítulo anterior.

### 3.1.1. Clasificación de trayectorias

Se va a proceder a integrar las ecuaciones de movimiento al igual que se hizo con el sistema kepleriano con el fin de ver las posibles órbitas que puede describir el cuerpo. Para su representación se han tomado los valores  $\mu = 1$ ,  $G = 1$ ,  $\varepsilon = 0.1$ .

El potencial efectivo se determinará mediante la ecuación (2.35) donde ahora  $U(r) = -\frac{\mu}{r} - \frac{\varepsilon}{r^2}$ . De esta forma se tiene

$$U_{eff}(r) = \frac{G^2}{2r^2} - \frac{\mu}{r} - \frac{\varepsilon}{r^2}. \quad (3.3)$$

Se puede ver este potencial efectivo representado gráficamente en la figura 3.1.

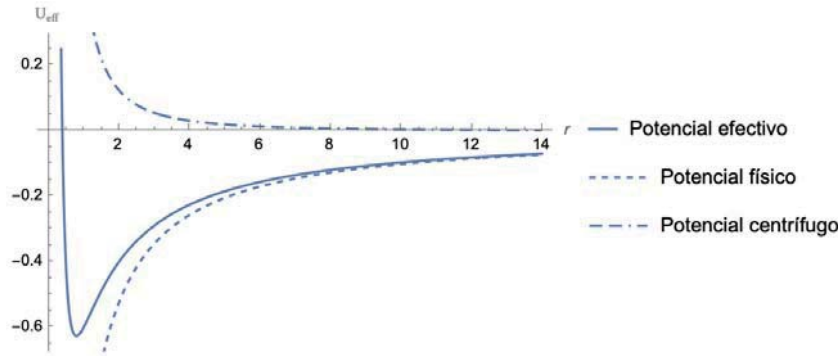


Figura 3.1: Potencial efectivo tipo Manev ( $\varepsilon = 0.1$ ).

Nuevamente, el movimiento es posible si  $U_{eff} \leq h$  donde  $h$  denota la energía del sistema. El cálculo se realizará tanto en coordenadas cartesianas como en polares comprobándose la coincidencia.

Ahora, de forma análoga a lo que se hizo en sistemas keplerianos, se observan los distintos tipos de movimientos según los valores de la energía.

#### ■ Órbita acotada circular

Con los datos que ya se han indicado que se van a utilizar para el estudio cualitativo ( $\mu = 1$ ,  $G = 1$ ,  $\varepsilon = 0.1$ ) se calcula nuevamente la derivada del potencial efectivo de la ecuación (3.3) y se iguala a cero para obtener el radio mínimo para el cual se da esta órbita

$$\frac{dU_{eff}}{dr} = 0 \Rightarrow -\frac{G^2}{r^3} + \frac{\mu}{r^2} + \frac{2\varepsilon}{r^3} = 0 \Rightarrow r = \frac{G^2 - 2\varepsilon}{\mu}. \quad (3.4)$$

Como se obtiene un único valor de  $r$ , sólo hay un mínimo del potencial efectivo ( $U_{eff}(r)$ ).

Para esta posición  $r$  se tendrá una energía mínima dentro de la zona permitida, es decir, en este caso la condición de movimiento dada por la ecuación (2.37) sólo se cumplirá para un punto obteniendo una órbita circular.

#### ■ Órbita acotada tipo roseta

Para valores de la energía próximos a la energía mínima (véase figura 3.2) se obtiene una órbita acotada, pero no cerrada, con forma de roseta.

Se puede comprobar que, en este caso, estos dos radios entre los que se moverá el cuerpo serán  $r_1 = 0.5$  y  $r_2 = 2$ . La integración de las ecuaciones de movimiento permite la visualización de la órbita. Se puede apreciar que la figura 3.2 no muestra una órbita elíptica debido al comportamiento oscilatorio de la línea de los ápsides<sup>8</sup>.

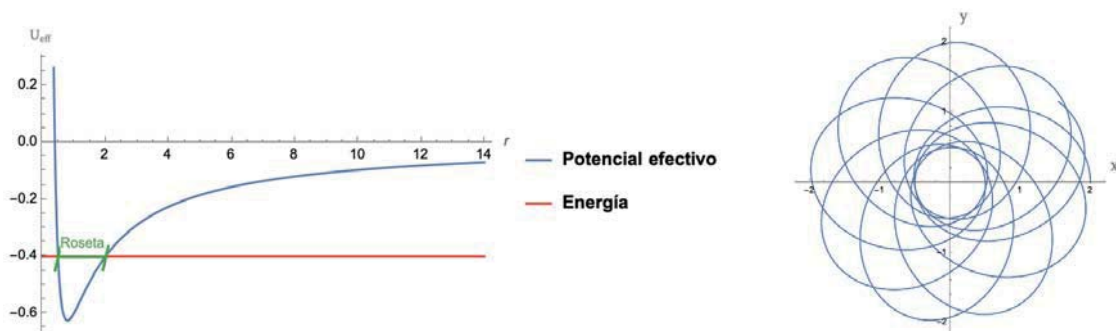


Figura 3.2: Órbita tipo roseta [Potencial tipo Manev] ( $\varepsilon = 0.1$ ).

Teniendo en cuenta la demostración del vector de Laplace como integral del movimiento en el caso kepleriano (ver ecuación (2.18)), se puede comprobar que ahora este vector ya no es constante. La variación del vector de Laplace dada en la expresión (2.17) permanece invariante, no obstante, se debe tener en cuenta que ahora las ecuaciones de movimiento vienen dadas por el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}, \\ \dot{\mathbf{X}} = \left( -\frac{\mu}{r^3} - \frac{2\varepsilon}{r^4} \right) \mathbf{x}. \end{cases} \quad (3.5)$$

Siguiendo el mismo procedimiento que para el caso kepleriano, aplicando la misma propiedad del producto vectorial, se llega a

$$\dot{\mathbf{A}} = -\frac{2\varepsilon}{r^4} (\mathbf{x} \times \mathbf{G}) \neq 0. \quad (3.6)$$

Esto tiene como consecuencia que el semieje y la excentricidad de la órbita no se mantienen constantes con el paso del tiempo, como se puede observar en la siguiente subsección, y que además concuerda con la variación de elementos orbitales descrita por las ecuaciones de Gauss (apéndice A) para una fuerza perturbadora radial.

Para las fuerzas centrales atractivas siempre existen soluciones circulares. Sin embargo, la existencia de órbitas cerradas solo ha sido probada para el potencial de Newton o el oscilador armónico (véase la ecuaciones (3.7 y 3.8)) para los cuales en 1873 Bertrand demostró que todas las soluciones próximas a la órbita circular son órbitas periódicas [17]. En la sección 3.1.3 se verá que ambos potenciales están relacionados entre sí.

$$F_1(r) = -\frac{k}{r^2} \quad ; \quad F_2(r) = -kr \quad (3.7)$$

$$U_1(r) = -\frac{k}{r} \quad ; \quad U_2(r) = kr^2 \quad (3.8)$$

<sup>8</sup>Línea que une el apoastro y el periastro de una órbita. Coincide con el eje mayor de la elipse.

El primer caso se puede identificar fácilmente con el potencial tipo kepleriano, y el segundo con la ley de Hooke, únicas fuerzas centrales para las que se probó que todas las órbitas acotadas son órbitas cerradas.

En el potencial cuasi-kepleriano de tipo Manev, solamente se tendrá una órbita cerrada cuando exista una relación de conmensurabilidad entre la frecuencia de oscilación de la línea de los ápsides y la del movimiento circular como se verá en la sección 3.1.4.

### 3.1.2. Variación de los elementos orbitales

Cuando un cuerpo se mueve bajo la acción de una fuerza central, su momento angular es constante. Teniendo en cuenta que el potencial tipo Manev es central, y siguiendo la misma demostración que la realizada en la subsección 2.2 para el movimiento kepleriano, véase ecuación 2.15, se puede concluir la conservación del momento angular para potenciales tipo Manev. Esto se puede observar gráficamente en la figura 3.3, donde para el caso de la órbita tipo roseta anteriormente calculada, el momento angular permanece constante sobre el valor de 1. Además se mostrará como varían los elementos orbitales  $a, e, i, \omega$  con el tiempo.

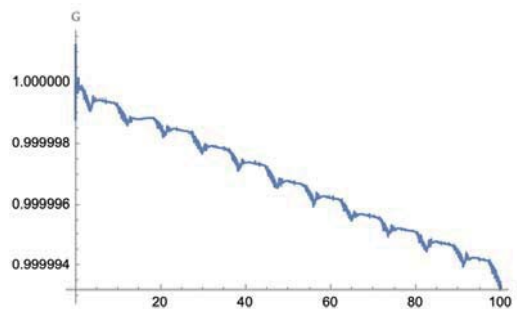


Figura 3.3: Conservación del momento angular en órbita tipo roseta para potencial tipo Manev ( $\epsilon=0.1$ ).

Los elementos orbitales introducidos en la subsección 2.2 son constantes para el movimiento kepleriano. Sin embargo, el modelo de fuerzas dado en la ecuación (3.1) de tipo Manev, representa un movimiento de Kepler perturbado ya que la magnitud de la fuerza perturbadora,  $\frac{2\epsilon}{r^3}$ , es pequeña comparada con la aceleración gravitatoria principal. Esta fuerza perturbadora hace que los elementos orbitales varíen con el tiempo.

A continuación, en la figura 3.4, se muestra como varían los elementos orbitales. Observar que el semieje y la excentricidad sufren variaciones periódicas, mientras que la inclinación es nula y el argumento del periastro, además de la variación periódica sufre una variación secular. Esta variación se cuantificará en el apartado 3.3.

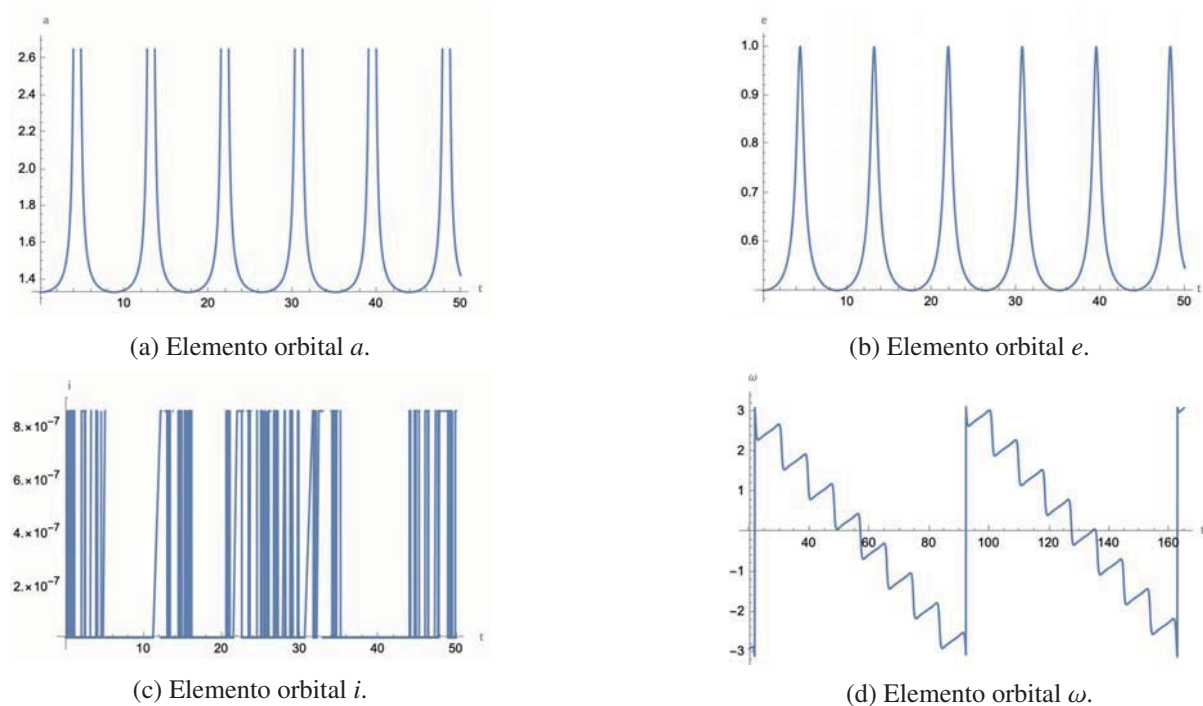


Figura 3.4: Evolución de los elementos orbitales  $a$ ,  $e$ ,  $i$  y  $\omega$ .

Observar además que la variación que se aprecia en los elementos orbitales concuerda con lo que nos indican las ecuaciones de Gauss (apéndice A). Estas ecuaciones nos dan la variación de los elementos en función de las componentes radial, normal y transversal de una fuerza perturbadora. Como la fuerza perturbadora es radial, se puede deducir de la ecuación (A.5) del apéndice A que sólo afectará a los elementos orbitales  $a, e, \omega$ .

### 3.1.3. Reducción a la forma de un oscilador armónico forzado

Al igual que se hizo para el caso de un potencial tipo kepleriano, se va a expresar el movimiento del cuerpo en un potencial tipo Manev a través de la transformación a una ecuación diferencial ordinaria que describe el movimiento de un oscilador armónico forzado.

Se partirá de la ecuación (2.41) aplicando el potencial tipo Manev

$$\frac{dr}{df} = \frac{r^2}{G} \sqrt{2 \left( h - \left( -\frac{\mu}{r} - \frac{\varepsilon}{r^2} \right) \right) - \frac{G^2}{r^2}}. \quad (3.9)$$

A partir de esta ecuación se procederá como en la sección 2.4, resolviendo esta EDO separable para obtener la ecuación de la trayectoria  $r(f)$  y llegando también a ese resultado mediante la reducción a un oscilador armónico.

$$f - f_0 = \int \frac{G/r^2}{\sqrt{2 \left( h - \left( -\frac{\mu}{r} - \frac{\varepsilon}{r^2} \right) \right) - \frac{G^2}{r^2}}} dr = -G \int \frac{du}{\sqrt{2h + 2\mu u - (-2\varepsilon + G^2)u^2}}, \quad (3.10)$$

tras completar al cuadrado el radicando, y denotando  $K^2 = \frac{2h(-2\varepsilon + G^2) + \mu^2}{(-2\varepsilon + G^2)^2}$  se llega a

$$f = \frac{G}{\sqrt{-2\varepsilon + G^2}} \arccos \left( \frac{u - \frac{\mu}{-2\varepsilon + G^2}}{K} \right) \Rightarrow K \cos \left( \frac{\sqrt{-2\varepsilon + G^2}}{G} f \right) + \frac{\mu}{-2\varepsilon + G^2} = \frac{1}{r}, \quad (3.11)$$

deshaciendo ahora, por último, el cambio de  $K$  y despejando  $r$ , se obtiene

$$r = \frac{1}{\sqrt{\frac{2h(-2\varepsilon+G^2)+\mu^2}{(-2\varepsilon+G^2)^2}} \cos\left(\frac{\sqrt{-2\varepsilon+G^2}}{G} f\right) + \frac{\mu}{-2\varepsilon+G^2}}. \quad (3.12)$$

Si se denota  $\tilde{p} = \frac{G^2 - 2\varepsilon}{\mu}$ ,  $k = \frac{\sqrt{-2\varepsilon + G^2}}{G}$  y  $\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\frac{2h(G^2 - 2\varepsilon)}{\mu^2} + 1}$  queda la ecuación de la órbita como

$$r = \frac{\tilde{p}}{1 + \tilde{\varepsilon} \cos(kf)}. \quad (3.13)$$

Se va a comprobar que se llega a esta ecuación (3.13) escribiendo el problema como un oscilador armónico. Aplicando nuevamente la *Transformación de Binet* a la ecuación (3.9) se obtiene

$$-\frac{1}{\mu^2} \frac{du}{df} = \frac{1}{G\mu^2} \sqrt{2(h + \mu u + \varepsilon u^2) - G^2 u^2} \Rightarrow \frac{du}{df} = \frac{-1}{G} \sqrt{2(h + \mu u + \varepsilon u^2) - G^2 u^2}, \quad (3.14)$$

denotando  $u' = \frac{du}{df}$  y elevando ambos lados de la igualdad al cuadrado

$$(u')^2 = \frac{1}{G^2} [2(h + \mu u + \varepsilon u^2) - G^2 u^2] \Rightarrow (u')^2 = \frac{2h}{G^2} + \frac{2\mu}{G^2} u - \left(\frac{-2\varepsilon}{G^2} + 1\right) u^2. \quad (3.15)$$

Si se vuelve a hacer la derivada de  $u$  con respecto a  $f$  se llega a

$$2u'u'' = \frac{2u'\mu}{G^2} + \frac{2u'2\varepsilon u}{G^2} - 2u'u \Rightarrow u'' + u \left(\frac{-2\varepsilon}{G^2} + 1\right) = \frac{\mu}{G^2}. \quad (3.16)$$

Esta ecuación corresponde a un oscilador armónico forzado  $mx'' + kx = F(t)$ , sin embargo, a diferencia de la ecuación (2.51) obtenida para el potencial de Kepler con  $m = k = 1$ , ahora  $m = 1$  pero  $k = \frac{-2\varepsilon}{G^2} + 1$ .

La solución de la ecuación (3.16) viene dada (véase el apéndice B) como

$$u = A \cos\left(\sqrt{\frac{-2\varepsilon}{G^2} + 1} f - f_0\right) + \frac{\mu}{-2\varepsilon + G^2}, \quad (3.17)$$

deshaciendo el cambio  $u = \frac{1}{r}$ ,

$$\frac{1}{r} = A \cos\left(\sqrt{\frac{-2\varepsilon}{G^2} + 1} f - f_0\right) + \frac{\mu}{-2\varepsilon + G^2} \Rightarrow r = \frac{1}{A \cos\left(\frac{\sqrt{-2\varepsilon+G^2}}{G} f\right) + \frac{\mu}{-2\varepsilon+G^2}}, \quad (3.18)$$

tomando sin pérdida de generalidad  $f_0 = 0$  y denotando la constante  $A = \sqrt{\frac{2h(-2\varepsilon + G^2) + \mu^2}{(-2\varepsilon + G^2)^2}}$  se llega a

$$r = \frac{1}{\sqrt{\frac{2h(-2\varepsilon+G^2)+\mu^2}{(-2\varepsilon+G^2)^2}} \cos\left(\frac{\sqrt{-2\varepsilon+G^2}}{G} f\right) + \frac{\mu}{-2\varepsilon+G^2}}. \quad (3.19)$$

Se puede comprobar que la ecuación que describe la posición del cuerpo coincide con la ecuación (3.12).



### 3.1.4. Órbitas rosetas cerradas

Se ha visto cómo para sistemas keplerianos perturbados de tipo Manev, se ha pasado de una elipse fija a una cuyo eje mayor va rotando. Además, esta rotación no es perfecta, es decir, cuando la elipse completa una revolución la primera elipse de la segunda revolución no coincide con la primera que se realizó la primera vez, es decir, la órbita no es cerrada. En la figura 3.2 se puede apreciar que se ha dado una revolución completa y cómo el comienzo de este nuevo paso por la parte inicial no coincide exactamente con el anterior paso que tuvo por esta zona. Sin embargo, existen condiciones bajo las cuales estas órbitas cierran.

Partiendo de la ecuación de la órbita (3.12) se tendrán órbitas cerradas siempre que  $\cos(kf) = \cos(k(f + 2\pi n))$ . Esto implica que  $k$  debe ser  $k = \frac{m}{n}$ ,  $\forall \{m, n\} \in \mathbb{N}$ .

De la propia definición de  $k$ ,  $k = \frac{\sqrt{-2\varepsilon + G^2}}{G}$ , si se despeja se obtiene que

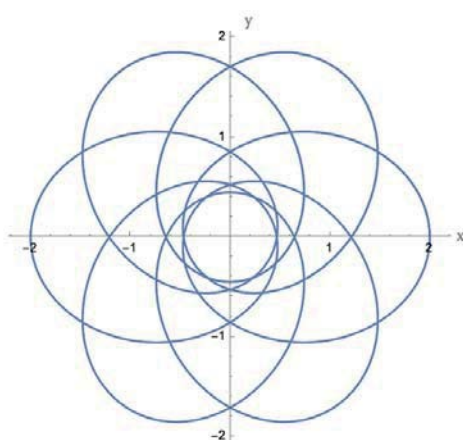
$$\varepsilon = \frac{G^2}{2}(1 - k^2), \quad (3.20)$$

así, para que la órbita sea cerrada

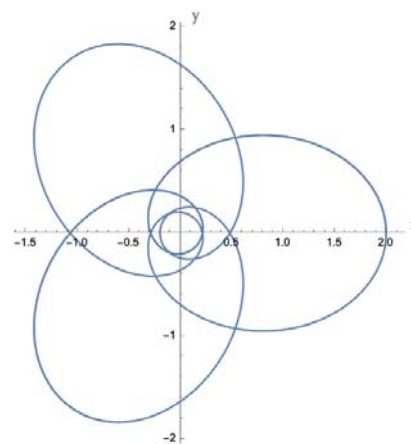
$$\varepsilon = \frac{G^2}{2} \left( 1 - \frac{m^2}{n^2} \right). \quad (3.21)$$

Si se retoma el caso que se realizó anteriormente, el valor que se tenía para epsilon era  $\varepsilon = 0.1$ , por lo que, aplicando la ecuación (3.20) que posteriormente se verá en la siguiente sección, se obtiene un valor de  $k = \sqrt{0.8}$  que no verifica la relación anterior, por lo que era de esperar que la órbita no fuera cerrada.

Sin embargo, ahora a sabiendas del requisito que debe cumplir  $k$ , y por ende  $\varepsilon$ , para que ésta sí sea cerrada, se toman, por ejemplo, los valores de  $k_1 = \frac{6}{7}$  y  $k_2 = \frac{3}{5}$  lo que implica unos valores de  $\varepsilon$  aproximados de 0.13 y 0.32 respectivamente conforme la ecuación (3.20). En la figura 3.5 se puede apreciar cómo ahora, haciendo una representación de la órbita tal cual se realizó anteriormente cuando se mostraba la órbita de tipo roseta, manteniendo todos los valores (incluidas las condiciones iniciales) excepto el valor de  $\varepsilon$ , la órbita queda perfectamente cerrada con seis lóbulos en el primer caso y tres en el segundo, es decir, es una elipse que precede con un ángulo de  $7\pi/3$  y  $10\pi/3$  respectivamente.



(a)  $k = 6/7$ .



(b)  $k = 3/5$ .

Figura 3.5: Órbitas cerradas en potencial tipo Manev.

### 3.1.5. Representación de la hodógrafa orbital

Si se realiza un procedimiento análogo al utilizado en la sección 2.5 las componentes de la velocidad ahora quedan de la forma

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{r^2}{p} [ek \sin(kf) \cos(f) \dot{f} - \sin(f) \dot{f} - e \sin(f) \cos(kf) \dot{f}], \\ \dot{y} = \frac{r^2}{p} [ek \sin(kf) \sin(f) \dot{f} + \cos(f) \dot{f} + e \cos(f) \cos(kf) \dot{f}]. \end{cases} \quad (3.22)$$

A diferencia del caso kepleriano, se puede contemplar que estas ecuaciones no llevan a una hodógrafa con forma de circunferencia, de hecho, en la figura 3.6 se representa la hodógrafa de la órbita mostrada en la figura 3.2.

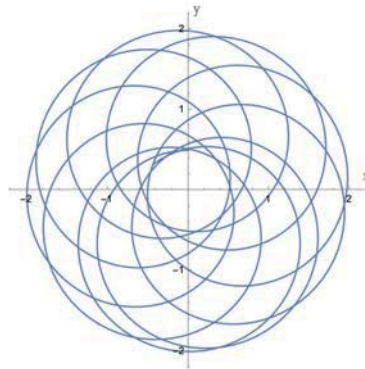


Figura 3.6: Hodógrafa de órbita roseta en potencial tipo Manev ( $\varepsilon = 0.1$ ).

La hodógrafa, al igual que la órbita, también tiene una forma de tipo roseta.

## 3.2. Sistema cuasi-kepleriano tipo potencial de Schwarzschild

Este tipo de potenciales que son de la forma

$$U(r) = -\frac{A}{r} - \frac{B}{r^3}, \quad (3.23)$$

además de aparecer como modelo relativista, también tiene especial cabida en el problema principal del satélite artificial donde se tiene en cuenta el coeficiente  $J_2$  del achatamiento del cuerpo central, y para su tratamiento analítico se usa los intermediarios radiales de Cid [1]. También se encuentran estos potenciales en el estudio de efectos de mareas en la atracción de dos sólidos.

Al igual que en el potencial de Manev, se va a estudiar el potencial (3.23) como modelo perturbado del potencial de Kepler, es decir, se considera

$$U(r) = -\frac{\mu}{r} - \frac{\varepsilon}{r^3}, \quad (3.24)$$

con  $\varepsilon \geq 0$  un pequeño parámetro.

### 3.2.1. Clasificación de trayectorias

El potencial efectivo, definido de forma genérica por la ecuación (2.35) donde ahora el potencial viene dado por la expresión (3.24), en este caso es

$$U_{eff}(r) = \frac{G^2}{2r^2} - \frac{\mu}{r} - \frac{\varepsilon}{r^3}. \quad (3.25)$$

Al igual que para el potencial kepleriano y de Manev, el movimiento sólo es posible si  $U_{eff} \leq h$ . A diferencia del potencial kepleriano y del de tipo Manev, el potencial efectivo tipo Schwarzschild presenta uno o dos puntos críticos dependiendo del valor de  $\varepsilon$ . Su gráfica puede observarse en las figuras 3.7 y 3.8.

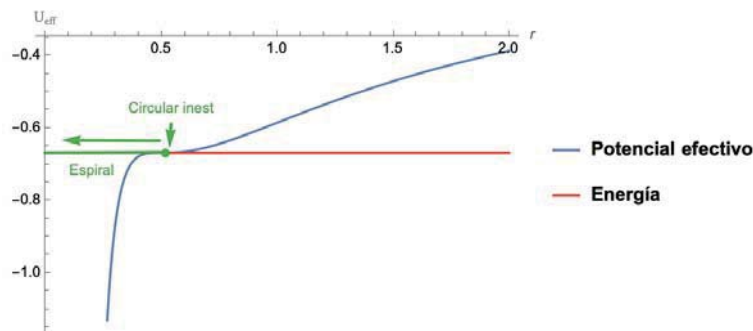


Figura 3.7: Potencial tipo Schwarzschild para  $\varepsilon \approx 0.08$  (en rojo el nivel de energía de la órbita circular inestable).

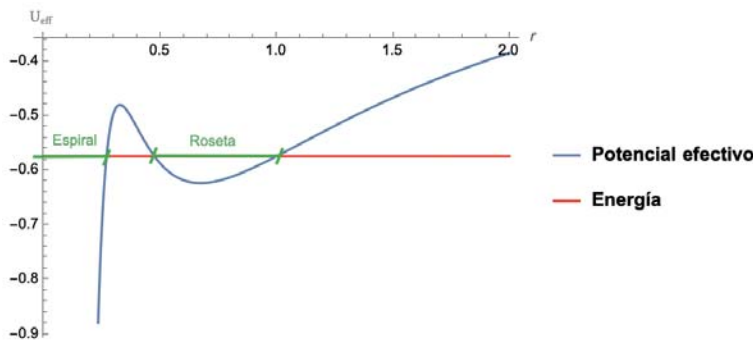


Figura 3.8: Potencial tipo Schwarzschild para  $\varepsilon \approx 0.07$  (en rojo el nivel de energía de la órbita tipo roseta).

Se observa que el movimiento acotado puede ser de tipo circular, roseta o espiral.

### ■ Órbita acotada circular

Siguiendo el mismo procedimiento que en la sección 3.1.1 se llega a

$$\frac{dU_{eff}}{dr} = 0 \Rightarrow -\frac{G^2}{r^3} + \frac{\mu}{r^2} + \frac{3\varepsilon}{r^4} = 0 \Rightarrow r = \frac{G^2 \pm \sqrt{G^4 - 12\varepsilon\mu}}{2\mu}. \quad (3.26)$$

Por lo tanto, si  $\varepsilon = \frac{G^4}{12\mu}$  existirá una única órbita circular para  $r_0 = \frac{G^2}{2\mu}$ . En la figura 3.7 se representa la energía de esta órbita circular junto al potencial. Se puede apreciar que la intersección es un punto de inflexión (punto verde). Esto llevará a que la órbita sea circular pero inestable, pues una ligera modificación de la energía llevará a una espiral, es decir, a que el cuerpo esté en constante aproximación al potencial gravitatorio.

Sin embargo, para cualquier otro valor de  $\varepsilon \neq \frac{G^4}{12\mu}$  existirán dos órbitas circulares, siendo una de

ellas estable y la otra inestable. Esta situación está representada en la figura 3.9.

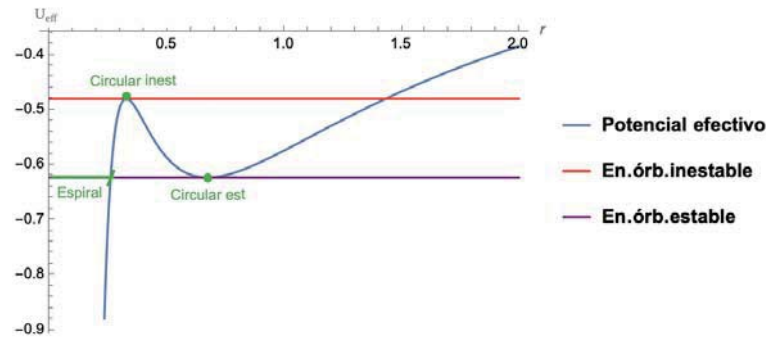


Figura 3.9: Potencial tipo Schwarzschild para  $\varepsilon \approx 0.07$  (en rojo y morado los niveles de energía de las órbitas circulares).

■ **Órbita acotada no circular**

Como se puede extraer de las representaciones anteriores de la función  $U_{eff}$ , el movimiento acotado tipo roseta, es decir, confinado entre dos radios, solo se obtienen para valores de  $\varepsilon \neq \frac{G^4}{12\mu}$ , tomando valores de la energía próxima a la energía mínima y siempre y cuando el cuerpo no se encuentre demasiado próximo al origen del potencial (véase las figuras 3.8 y 3.10).

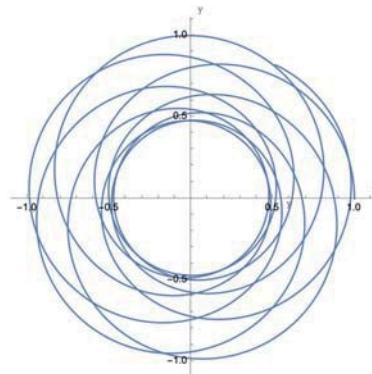


Figura 3.10: Evolución órbita tipo roseta con el tiempo ( $\varepsilon \approx 0.07$ ).

Observar en las figuras 3.7 y 3.8 que para distancias próximas al origen el movimiento está permitido y da lugar a una órbita de tipo espiral con un acercamiento infinito a este origen (véase la figura 3.11).

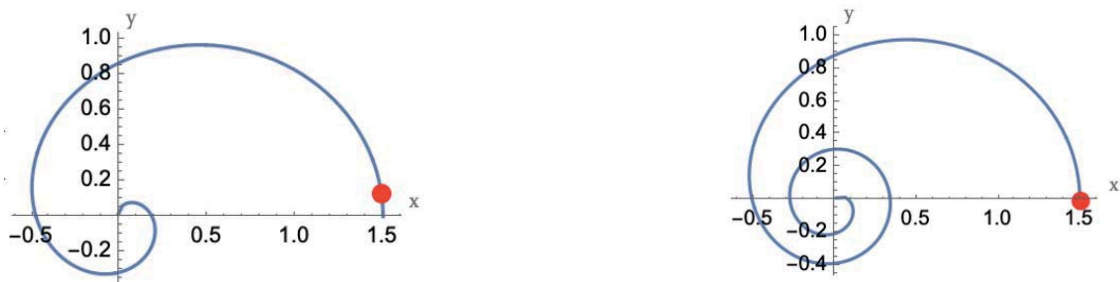


Figura 3.11: Cuerpo orbitando en espiral atractiva ( $\varepsilon \approx 0.08$  y  $\varepsilon \approx 0.07$  respectivamente).

### 3.2.2. Variación de los elementos orbitales

Esta subsección será análoga a la realizada para el potencial tipo Manev en el apartado 3.1.2 pero bajando ahora con un potencial tipo Schwarzschild. Siguiendo la misma demostración que la realizada en la sección 2.2 para el movimiento kepleriano, véase ecuación (2.15), se puede probar la conservación del momento angular. En la figura 3.12 se vuelve a mostrar cómo éste permanece constante.

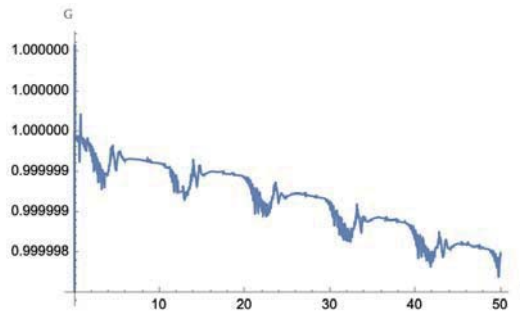


Figura 3.12: Conservación del momento angular en órbita tipo roseta para potencial tipo Schwarzschild ( $\epsilon=0.01$ ).

A continuación, en la figura 3.13 se muestra la variación de los elementos orbitales para una fuerza perturbadora de tipo Schwarzschild. Siguiendo el mismo razonamiento del apartado 3.2.1, se aprecia que la variación observada en estos elementos concuerda con lo que nos indican las ecuaciones de Gauss (apéndice A) al seguir siendo la fuerza perturbadora radial. En la sección 3.3 se verá como con estas ecuaciones se puede cuantificar la variación del argumento del periastro.

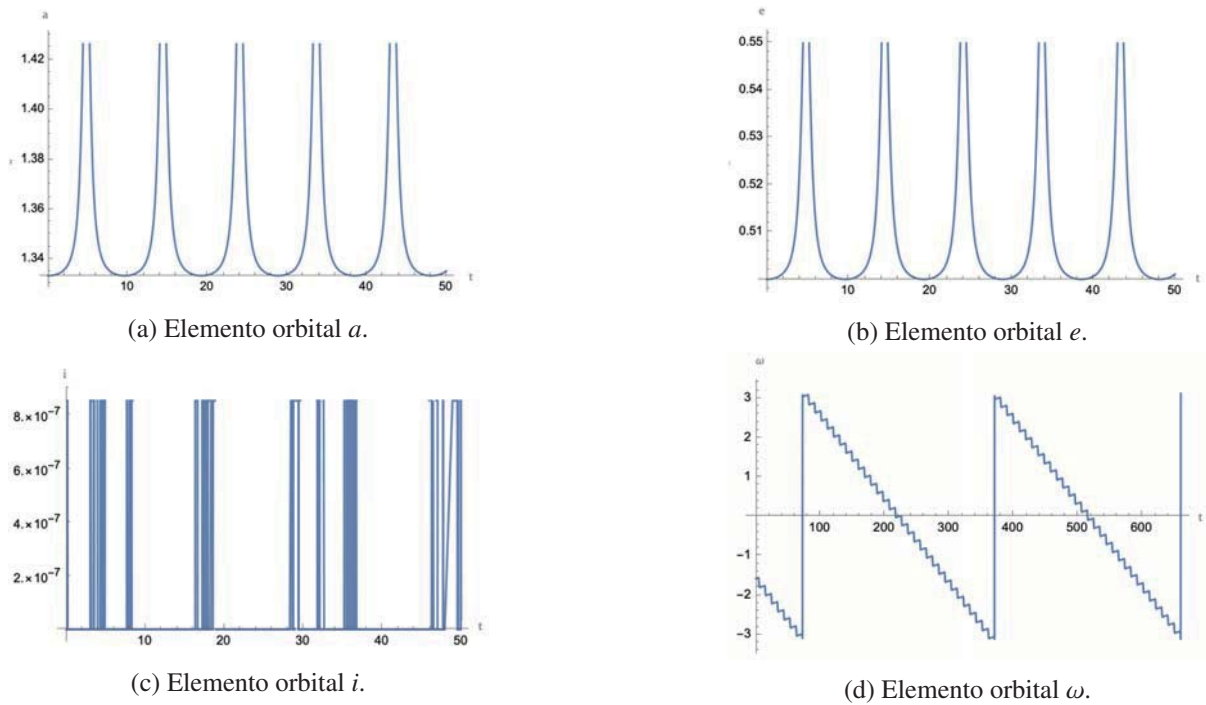


Figura 3.13: Evolución de los elementos orbitales  $a$ ,  $e$ ,  $i$  y  $\omega$ .

De nuevo sólo se aprecia variación secular para  $\omega$  como era de esperar (verapéndice A).

### 3.2.3. Reducción a la forma de un oscilador armónico forzado

Se comprobará en este apartado que la ecuación del oscilador armónico forzado es no lineal y que tampoco se puede obtener una expresión explícita de  $r(f)$ , ni en consecuencia, determinar un valor de la perturbación  $\varepsilon$  con el fin de obtener una órbita cerrada.

Se partirá nuevamente de la expresión (2.41) aplicando el potencial tipo Schwarzschild

$$\frac{dr}{df} = \frac{r^2}{G} \sqrt{2 \left( h - \left( -\frac{\mu}{r} - \frac{\varepsilon}{r^3} \right) \right) - \frac{G^2}{r^2}}. \quad (3.27)$$

Usando nuevamente el cambio de variable ya utilizado anteriormente ( $r = 1/u$ ) se tiene

$$-\frac{1}{r^2} \frac{du}{df} = \frac{1}{G r^2} \sqrt{2(h + \mu u + \varepsilon u^3) - G^2 u^2} \Rightarrow \frac{du}{df} = \frac{-1}{G} \sqrt{2(h + \mu u + \varepsilon u^3) - G^2 u^2}. \quad (3.28)$$

Si se sigue el mismo procedimiento utilizado para los potenciales de Kepler y tipo Manev intentando resolver la ecuación diferencial como separable, queda

$$f - f_0 = -G \int \frac{du}{\sqrt{2(h + \mu u + \varepsilon u^3) - G^2 u^2}}, \quad (3.29)$$

para cuya resolución hay que hacer uso de integrales elípticas y resolver la integral numéricamente. Detalles de su integración se pueden encontrar en Abad et al. [1].

Por otro lado, si se continua con la reducción a la forma de un oscilador, denotando  $u' = \frac{du}{df}$  y elevando ambos lados de la igualdad al cuadrado queda

$$(u')^2 = \frac{1}{G^2} [2(h + \mu u + \varepsilon u^3) - G^2 u^2] \Rightarrow (u')^2 = \frac{2h}{G^2} + \frac{2\mu u}{G^2} + \frac{2\varepsilon u^3}{G^2} - u^2, \quad (3.30)$$

derivando de nuevo  $u$  respecto a  $f$  se tiene

$$2u' u'' = \frac{2\mu}{G^2} + \frac{2\mu \cdot 3\varepsilon u^2}{G^2} - 2u' u \Rightarrow u'' - u^2 \left( \frac{3\varepsilon}{G^2} \right) + u = \frac{\mu}{G^2}. \quad (3.31)$$

Esta ecuación corresponde a un oscilador armónico forzado no lineal y su solución no se puede expresar con funciones trigonométricas como se hizo para los potenciales de Kepler y Manev, sin embargo, se puede estudiar hacer un análisis de esta ecuación diferencial mediante el cálculo de sus puntos de equilibrio y estabilidad por linealización comprobando que se corresponde a lo obtenido en la sección 3.2.1. Para ello, escribiendo la ecuación diferencial (3.31) como sistema no lineal

$$\begin{cases} u' = v, \\ v' = u^2 \left( \frac{3\varepsilon}{G^2} \right) - u + \frac{\mu}{G^2}, \end{cases} \quad (3.32)$$

se obtiene que los puntos críticos del sistema son

$$\begin{cases} v = 0, \\ u^2 \left( \frac{3\varepsilon}{G^2} \right) - u + \frac{\mu}{G^2} = 0, \end{cases} \quad (3.33)$$

es decir,  $\left( u = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 12\varepsilon\mu/G^4}}{6\varepsilon/G^2}, v = 0 \right)$ . El jacobiano evaluado en cada uno de estos puntos es

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{6\varepsilon}{G^2}u - 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow J|_{\left(\frac{1 \pm \sqrt{1 - 12\varepsilon\mu}/G^4}{6\varepsilon/G^2}, 0\right)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \pm \sqrt{1 - \frac{12\varepsilon\mu}{G^4}} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.34)$$

Se puede estudiar su estabilidad en función de la traza y el determinante de esta matriz. Como la traza es nula y el determinante es  $\mp \sqrt{1 - \frac{12\varepsilon\mu}{G^4}}$ , se tiene que el punto de equilibrio  $\left(u = \frac{G^2 + \sqrt{G^4 - 12\varepsilon\mu}}{6\varepsilon}, v = 0\right)$  es un punto silla inestable, mientras que el punto de equilibrio  $\left(u = \frac{G^2 - \sqrt{G^4 - 12\varepsilon\mu}}{6\varepsilon}, v = 0\right)$  es un centro. Se puede comprobar la caracterización de estos puntos de equilibrios a través de la figura 3.14 donde el punto aproximado (3.06, 0) corresponde a la inestabilidad tipo silla mientras que el (1.49, 0) corresponde al centro.

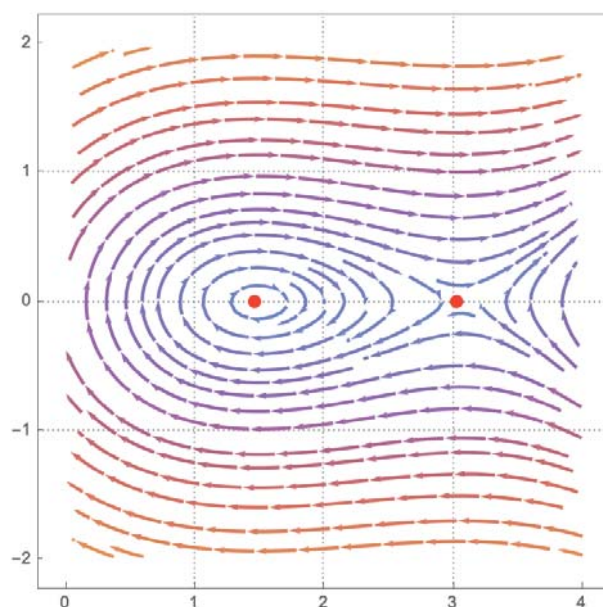


Figura 3.14: Retrato fásico para el potencial tipo Schwarzschild ( $\varepsilon \approx 0.07$ ).

Además, se puede observar que las soluciones de equilibrio obtenidas  $\left(u = \frac{G^2 \pm \sqrt{G^4 - 12\varepsilon\mu}}{6\varepsilon}, v = 0\right)$ , si se deshace el cambio  $u = 1/r$  son,  $\left(r = \frac{6\varepsilon}{G^2 \pm \sqrt{G^4 - 12\varepsilon\mu}}, \dot{r} = 0\right)$ . Racionalizando el denominador quedan  $r = \frac{G^2 \pm \sqrt{G^4 - 12\varepsilon\mu}}{2\mu}$ , que son los dos puntos críticos de la función potencial efectivo representado en la figura 3.9, y donde se observaba su carácter estable e inestable.

Este mismo análisis cualitativo de las soluciones de equilibrio se ha realizado al potencial de Kepler y de Manev, en ambos casos el sistema de ecuaciones diferenciales de orden uno que se obtiene es de la forma

$$\begin{cases} u' = v, \\ v' = -\alpha u + \frac{\mu}{G^2}, \end{cases} \quad (3.35)$$

con  $\alpha = 1 > 0$  para Kepler y  $\alpha = 1 - \frac{2\varepsilon}{G^2} > 0$  para Manev. Ambos sistemas son lineales, con un único punto crítico (tipo centro) que corresponde con el obtenido como solución de  $U'_{eff}(r) = 0$ .

### 3.3. Precesión del periastro

En el estudio del potencial de Manev se ha visto que la órbita precede un ángulo  $\frac{2\pi}{k}$ . Para el potencial tipo Schwarzschild, al no poder obtener una ecuación de una cónica como (3.13) no se puede determinar analíticamente el ángulo de precesión, pero sí se puede hacer una estimación de su valor. Para ello se usará las ecuaciones variacionales de Gauss [18] que nos dan la variación de los elementos orbitales debida a una fuerza de perturbación.

Si bien es cierto que el potencial de Schwarzschild viene dado por

$$U(r) = -\frac{\mu}{r} - \frac{\varepsilon}{r^3}, \quad (3.36)$$

para este caso se utilizará la formulación de las ecuaciones usando la fuerza perturbadora de forma que

$$\ddot{x} = -\frac{\mu}{r^2} + P, \quad (3.37)$$

donde  $P$  corresponde a la fuerza perturbadora dada por

$$P = -\frac{3\varepsilon}{r^4}. \quad (3.38)$$

Esta fuerza perturbadora, como también se detalló en el apartado 2.1, es una fuerza central por lo que únicamente tiene componente radial. Las ecuaciones de Gauss determinan la variación de los elementos orbitales en función de las componentes de la fuerza perturbadora en el sistema orbital  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{n})$  [12]. En particular interesa la variación del periastro, cuya expresión (referencia [18]) viene dada por

$$\dot{\omega} = -\frac{G}{\mu e} \cos f P_u + \frac{G^2 + r\mu}{\mu e G} \sin f P_v - \frac{r}{G} \cot i \sin(\omega + f) P_n, \quad (3.39)$$

donde los términos correspondientes a  $P_n$  y  $P_v$  se cancelan pues la fuerza sólo tiene componente radial,  $P_u = -\frac{3\varepsilon}{r^4}$ . Por tanto, sustituyendo  $P_u$  queda

$$\dot{\omega} = \frac{3\varepsilon G}{\mu e r^4} \cos f. \quad (3.40)$$

La variación del periastro entre los instantes de tiempo  $t = 0$  y  $t = T$  correspondientes a dos pasos consecutivos por dicho punto es

$$\Delta\omega = \int_0^T \dot{\omega} dt. \quad (3.41)$$

Usando la relación (2.29) se obtiene  $dt = \frac{r^2}{G} df$ . Introduciendo este diferencial de tiempo en la ecuación anterior e integrando entre dos pasos consecutivos por el periastro ( $f \in [0, 2\pi]$ )

$$\Delta\omega = \int_0^{2\pi} \frac{\dot{\omega} r^2}{G} df, \quad (3.42)$$

sustituyendo (3.40) queda

$$\Delta\omega = \frac{3\varepsilon}{e\mu} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2} \cos f df. \quad (3.43)$$

Introduciendo, por otro lado, la ecuación de la cónica dada en la expresión (2.56)



$$\Delta\omega = \frac{3\varepsilon}{e\mu} \int_0^{2\pi} \frac{(1 + e \cos f)^2}{p^2} \cos f df = \frac{6\pi\varepsilon}{\mu p^2}. \quad (3.44)$$

Se recuerda que, como se vio en la sección 2.2 el momento angular se puede definir como  $G^2 = p\mu$  y el *semilatus rectum* como  $p = a(1 - e^2)$ . Sustituyendo en la expresión anterior, se obtiene que para potenciales tipo Schwarzschild la precesión del periastro viene dado por la expresión

$$\Delta\omega = \frac{6\pi\varepsilon}{G^2 a(1 - e^2)}. \quad (3.45)$$

### 3.3.1. Precesión del perihelio de Mercurio

Para el estudio de la precesión del perihelio de Mercurio se presenta un modelo de fuerzas de tipo Schwarzschild (3.37-3.38) [19], este modelo se formula de manera que la fuerza tenga la expresión

$$F(r) = -\frac{\mu}{r^2} - \frac{3\mu G^2}{c^2 r^4}, \quad (3.46)$$

donde  $c$  es la velocidad de la luz. Por tanto, el valor del pequeño parámetro es  $\varepsilon = \frac{\mu G^2}{c^2}$ . Sustituyendo en la ecuación (3.45), que da el valor de la precesión del periastro en función del parámetro epsilon, queda

$$\Delta\omega = \frac{6\pi\mu}{c^2 a(1 - e^2)}. \quad (3.47)$$

Se procede a tomar los valores de la órbita de Mercurio. En primer lugar se calcula el valor de la masa reducida. Para ello se utiliza la expresión vista en el apartado 2.2

$$\mu = \frac{G^2}{p}. \quad (3.48)$$

Pero también se conocen las siguiente relaciones [8]

$$G = \frac{2\pi ab}{T}, \quad (3.49)$$

$$p = \frac{b^2}{a}, \quad (3.50)$$

donde  $a$  y  $b$  corresponden a los semiejes mayor y menor respectivamente, y  $T$  al período de la órbita.

Si se sustituye las ecuaciones (3.49) y (3.50) en la expresión (3.48) se obtiene  $\mu$  en función del semieje mayor y del período de la órbita

$$\mu = \frac{(2\pi ab)^2 / T^2}{b^2 / a} = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}. \quad (3.51)$$

Si ahora se sustituye esta expresión en la ecuación (3.47) se llega a

$$\Delta\omega = \frac{24\pi^3 a^2}{T^2 c^2 (1 - e^2)}. \quad (3.52)$$

Ángulo obtenido en 1915 por Einstein para la precesión del perihelio de Mercurio debido al efecto de la Teoría de la Relatividad [20].

Si se toman los siguientes valores correspondientes a la órbita de Mercurio,  $T = 88d = 7.6032 \cdot 10^6 s$ ,  $a = 5.79 \cdot 10^{10} m$ ,  $c = 3 \cdot 10^8 m/s$  y  $e = 0.206$  queda

$$\Delta\omega = \frac{24\pi^3 \cdot (5.79 \cdot 10^{10})^2}{(7.6032 \cdot 10^6)^2 \cdot (3 \cdot 10^8)^2 \cdot (1 - (0.206)^2)} = 5.0074 \cdot 10^{-7} \text{rad/vuelta}, \quad (3.53)$$

que corresponde a 0.1033 arsec/vuelta, es decir, 43 arcsec/siglo, valor obtenido por Einstein.

# Capítulo 4

## Conclusiones

En este capítulo se mostrarán una serie de conclusiones extraídas del trabajo.

- **Conservación del momento angular y variación del vector de Laplace.** Se ha mostrado como el momento angular se conserva para el potencial kepleriano y para los cuasi-keplerianos mostrados demostrando que el problema de los dos cuerpos es planar. Por otra parte, se concluye que la conservación del vector de Laplace únicamente tiene lugar en el caso kepleriano, pues para los otros potenciales (Manev y Schwarzschild) se ha visto que no ocurre esto, implicando la variación de los elementos orbitales  $a$  y  $e$  como además se ha mostrado en las figuras 3.4 y 3.13.
- **Órbitas circulares y elípticas.** Se ha mostrado a través del análisis cualitativo de las órbitas en función de la energía el hecho de que las órbitas siempre son cerradas (circulares y elípticas) en el potencial kepleriano tal cual indica el teorema de Bertrand. En el potencial tipo Manev y Schwarzschild se pueden encontrar órbitas tipo roseta y espirales.
- **Similitud entre potencial kepleriano y potencial tipo Manev.** Se ha comprobado que, a través de la reducción de un oscilador armónico forzado, las expresiones de las ecuaciones de las cónicas son similares (ver ecuaciones (2.56) y (3.13)) llevando al hecho de que aunque las órbitas sean, por lo general, rosetas abiertas, puede darse el caso de que sea una órbita cerrada cuando exista conmensurabilidad entre el periodo de rotación del cuerpo en la órbita y el ángulo de precesión de la misma como se detalla en la subsección 3.1.4 y se aprecia en la figura 3.5.
- **Diferencias y similitudes entre potencial kepleriano y tipo Manev con el potencial perturbado tipo Schwarzschild.** Se ha comprobado que la reducción a la forma de un oscilador armónico forzado es no lineal únicamente en este último potencial llevando a la imposibilidad de determinar un  $\varepsilon$  que permita tener una órbita cerrada, además de no poder obtener una ecuación explícita para la órbita. El potencial tipo Schwarzschild es el único de los trabajados en el que se encuentran dos puntos críticos como se muestra tanto en la figura 3.9 como en 3.14. No obstante, a través de las ecuaciones de Gauss (ver apéndice A) se muestra como la variación que experimentan los elementos orbitales es similar para ambos potenciales perturbados, existiendo únicamente variación secular para el argumento del periastro.
- **Precesión del perihelio de Mercurio.** Se ha obtenido, para el potencial tipo Schwarzschild, la ecuación que describe la precesión del periastro y se ha comprobado que se llega al valor que obtuvo Einstein de la precesión del perihelio de Mercurio a partir de esta expresión.



# Bibliografía

- [1] A.Abad, M.Calvo, and A.Elipse. On the integration of cid's radial intermediary. *Acta Astronautica*, 179:519–524, 2 2021.
- [2] A.Elipse. Soluciones de equilibrio en el problema general y restringido de tres sólidos, aplicación a movimientos en torno a los puntos lagrangianos, 1983.
- [3] G.Botteri and R.Casazza. *El sistema astronómico de Aristóteles. Una interpretación*. Ediciones Biblioteca Nacional, 1 edition, 2015.
- [4] I.Asimov. *Nueva guía de la ciencia*. 1960.
- [5] Á.R.Cardona. *Breve historia de la astronomía*. Ediciones Nowtilus, S.L., 2012.
- [6] S.Murillo. *Prácticas científicas y procesos sociales. Una genealogía de las relaciones entre ciencias naturales, ciencias sociales y tecnología*. Biblos, 1 edition, 2012.
- [7] J.Gribbin. *Historia de la ciencia, 1543-2001*. 2 edition, 2004.
- [8] A.Abad, J.Á.Docobo, and A.Elipse. *Curso de astronomía*. Colección Textos Docentes, 1 edition, 2002.
- [9] S.Singh. *Big Bang. El descubrimiento científico más importante de todos los tiempos y todo lo que hay que saber del mismo*. Harper Collins Publ. UK, 2005.
- [10] M.Křížek. Relativistic perihelion shift of mercury revisited. *Astronomische Nachrichten*, 343, 2022.
- [11] F.Scheck. *Mechanics. From Newton's Law to Deterministic Chaos*. Springer, 6 edition, 2018.
- [12] A.Abad. *Astrodinámica*. Bubok Publishing S.L, 2012.
- [13] H.Goldstein, C.Poole, and J.Safko. *Classical Mechanics*. Addison Wesley, 3 edition, 2000.
- [14] S.Breiter and A.A.Jackson. Unified analytical solutions to two-body problems with drag. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 299:237–243, 1 1998.
- [15] T.Carter and M.Humi. Transformed variables and hodographs in impulsive orbit transfer. *Acta Astronautica*, 123:239–245, 3 2016.
- [16] A.Villoro. Órbitas de sistemas cuasi-keplerianos, 2 2018.
- [17] J.Bertrand. Théorème relatif au mouvement d'un point attire vers un centre fixe. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 77:849–853, 1873.
- [18] H.Pollard. *Mathematical Introduction to Celestial Mechanics*. Prentice-hall, inc. edition, 1966.
- [19] D.P.Rubincam. General relativity and satellite orbits: The motion of a test particle in the schwarzschild metric. *Celestial Mechanics*, 15:21–33, 1977.

- [20] A.Einstein. Erklärung der perihelbewegung des merkur aus der allgemeinen relativitätstheorie. *Sitzungsberichte der Königlich Preußische Akademie der Wissenschaften (Berlin)*, 47 (2):831–839, 1915.
- [21] A.J.Gil and M.J.Sevilla. Determinación gravimétrica del geoide a partir de un modelo de geopotencial: estudio comparativo de diversos métodos. *Aplicaciones de la colocación y estudios del geoide. Publicación. Instituto de Astronomía y Geodesia.*, 163:27–34, 1988.

## Apéndice A

# Sistemas keplerianos perturbados. Variación de constantes

Como se ha comentado en el capítulo 3 los sistemas cuasi-keplerianos son aquellos que parten de un potencial kepleriano al que se le introduce una perturbación. Tras el párrafo introductorio de este mismo capítulo, se puede llegar a la formulación de la ecuación del movimiento para este tipo de sistemas vista también en la ecuación (3.37).

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\mu \frac{\mathbf{x}}{r^3} + \mathbf{P}, \quad (\text{A.1})$$

donde se recuerda que  $\mathbf{P}$  hace referencia a la componente de la aceleración producida por el conjunto de fuerzas perturbadoras sobre el cuerpo.

A lo largo del proyecto se ha trabajado con esta ecuación, tanto para obtener la ecuación de la órbita como para el estudio cualitativo de las posibles trayectorias del cuerpo.

Para la integración de las ecuaciones de movimiento de los sistemas keplerianos (capítulo 2) y de los cuasi-keplerianos (capítulo 3) se ha usado el software *Wolfram Mathematica*. La integración se ha realizado tanto en coordenadas cartesianas como en coordenadas polares-nodales comprobándose que, efectivamente, el resultado era el mismo. Con esta integración, tras establecer unas condiciones iniciales, se puede obtener la posición y velocidad del cuerpo a lo largo de un período de tiempo. Se va a mostrar como ejemplo (extrapolable al resto de potenciales) la integración realizada en el trabajo para obtener la órbita tipo roseta que se ha mostrado en la figura 3.2 para el potencial tipo Manev. En coordenadas cartesianas las ecuaciones de movimiento a integrar fueron

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\mu \frac{x}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3} - 2\varepsilon \frac{x}{(\sqrt{x^2 + y^2})^4}, \\ \ddot{y} = -\mu \frac{y}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3} - 2\varepsilon \frac{y}{(\sqrt{x^2 + y^2})^4}, \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

donde  $\mu = 1$ ,  $\varepsilon = 0.1$ , y cuyas condiciones iniciales fueron  $\mathbf{x}(0) = 2$ ,  $\mathbf{y}(0) = 0$ ,  $\dot{\mathbf{x}}(0) = 0$  y  $\dot{\mathbf{y}}(0) = 1/2$ .

Por otro lado, para las coordenadas polares-nodales, como ya se vió para el caso kepleriano en las ecuaciones (2.32) y (2.33), aplicado al ejemplo comentado quedan como

$$= \frac{1}{2} \left( R^2 + \frac{\Theta^2}{r^2} \right) - \frac{\mu}{r} - \frac{\varepsilon}{r^2}, \quad (\text{A.3})$$

y como

$$\begin{aligned}
 \dot{R} &= -\frac{\partial \mathcal{H}_k}{\partial r} = \frac{\Theta^2}{r^3} - \frac{\mu}{r^2} - \frac{2\varepsilon}{r^3}, \\
 \dot{\Theta} &= -\frac{\partial \mathcal{H}_k}{\partial \theta} = 0, \\
 \dot{r} &= \frac{\partial \mathcal{H}_k}{\partial R} = R, \\
 \dot{\theta} &= \frac{\partial \mathcal{H}_k}{\partial \Theta} = \frac{\Theta}{r^2},
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

donde como condiciones iniciales se tomaron  $R(0) = 0$ ,  $\Theta(0) = 1$ ,  $r(0) = 2$  y  $\theta(0) = 0$ .

Por otro lado, se puede abordar la resolución de sistemas keplerianos perturbados a partir de las ecuaciones de variación de las constantes, en particular de los elementos orbitales. Las más conocidas son las ecuaciones de Gauss, que dan la variación de los elementos orbitales debidos a una fuerza perturbadora, y las ecuaciones de Lagrange, que se aplican cuando la fuerza perturbadora es conservativa y se expresan en términos de la función potencial de perturbación.

- **Ecuaciones de Gauss:** si  $\mathbf{P}$  denota una fuerza perturbadora, la variación de los elementos orbitales se expresa en función de las componentes de la fuerza perturbadora en la dirección radial  $\mathbf{u}$ , normal  $\mathbf{n}$  y transversal  $\mathbf{v}$ .

$$\begin{aligned}
 \frac{da}{dt} &= \frac{2e \sin f}{\eta n} P_u + \frac{2a\eta}{rn} P_v, \\
 \frac{de}{dt} &= \frac{\eta \sin f}{an} P_u + \left( \frac{\eta^3}{ern} + \frac{\eta r}{rna^2} \right) P_v, \\
 \frac{di}{dt} &= \frac{r \sin(\omega + f)}{G} P_n, \\
 \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{r \sin(\omega + f)}{G \sin i} P_n, \\
 \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{G}{\mu e} \cos f P_u + \frac{G^2 + r\mu}{\mu e G} \sin f P_v - \frac{r}{G} \cot i \sin(\omega + f) P_n, \\
 \frac{dM}{dt} &= n + \frac{\eta}{Ge} ((p \cos f - 2re) P_u - ((r + p) \sin f) P_v),
 \end{aligned} \tag{A.5}$$

donde  $\eta = \sqrt{1 - e^2}$  y  $n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$ .

- **Ecuaciones de Lagrange:** si la fuerza perturbadora deriva de un potencial, que denotamos  $V_p$  se tiene



$$\begin{aligned}
 \frac{da}{dt} &= -\frac{2}{an} \frac{\partial V_p}{\partial M}, \\
 \frac{de}{dt} &= \frac{1}{a^2 en} \left( \eta \frac{\partial V_p}{\partial w} - \eta^2 \frac{\partial V_p}{\partial M} \right), \\
 \frac{di}{dt} &= \frac{1}{a^2 n \eta \sin i} \left( \frac{\partial V_p}{\partial \Omega} - \cos i \frac{\partial V_p}{\partial \omega} \right), \\
 \frac{d\omega}{dt} &= \frac{1}{a^2 n} \left( \frac{\cot i}{\eta} \frac{\partial V_p}{\partial i} - \frac{\eta}{e} \frac{\partial V_p}{\partial e} \right), \\
 \frac{d\Omega}{dt} &= -\frac{1}{a^2 n \eta \sin i} \frac{\partial V_p}{\partial i}, \\
 \frac{dM}{dt} &= n + \frac{1}{an} \left( 2 \frac{\partial V_p}{\partial a} + \frac{\eta^2}{ae} \frac{\partial V_p}{\partial e} \right).
 \end{aligned} \tag{A.6}$$

A continuación se describe el movimiento perturbado debido al achatamiento terrestre.

En este trabajo se ha tratado en todo momento con una masa puntual, pero es obvio que la Tierra posee una masa que hay que tener en cuenta a la hora de estudiar un problema con mayor detalle. Además, se debe tener en cuenta que la Tierra posee diversas densidades a diferentes profundidades y zonas, además del achatamiento característico que presenta en los polos así como su forma irregular en toda la superficie.

Un modelo de potencial gravitatorio puede obtenerse a partir de un desarrollo de armónicos esféricos sólidos basado en los polinomios asociados de Legendre  $P_{nm}(t)$  de grado  $n$  y orden  $m$  [12], de forma que su expresión [21] sería:

$$U_T = -\frac{\mathcal{G}M}{r} \left[ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{R_T}{r} \right)^n + \sum_{m=0}^n (\bar{c}_{nm} \cos m\lambda + \bar{s}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm} \sin \varphi \right] + \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \cos^2 \varphi, \tag{A.7}$$

donde  $\bar{c}_{nm}$  y  $\bar{s}_{nm}$  son los coeficientes de los armónicos esféricos normalizados y  $\bar{P}_{nm}$  hace referencia al polinomio asociado de Legendre normalizado de forma que

$$\bar{P}_{nm}(\sin \varphi) = N_{nm} P_{nm}(\sin \varphi) = \left[ \frac{(2n+1)(n-m)!k}{(m+n)!} \right]^{\frac{1}{2}} P_{nm}(\sin \varphi). \tag{A.8}$$

Por otro lado, se indica que el polinomio asociado de Legendre queda de la siguiente manera

$$P_{nm}(\sin \varphi) = (1 - \sin^2 \varphi)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{d(\sin \varphi)^m} P_n(\sin \varphi), \tag{A.9}$$

donde el polinomio de Legendre es

$$P_n(\sin \varphi) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d(\sin \varphi)^n} (\sin^2 \varphi - 1)^n. \tag{A.10}$$

Se puede observar cómo la parte más influyente ( $U = -\frac{\mathcal{G}M}{r} = -\frac{\mu}{r}$ ) hace referencia al potencial ideal kepleriano, mientras que el resto del desarrollo viene motivado por las perturbaciones dónde la mayor influencia viene dada por el achatamiento de los polos terrestres (coeficiente  $J_2$ ). Se indica que los términos en los que  $m = 0$  hace referencia a armónicos zonales, aquellos que  $m = n$  a sectoriales mientras que los que  $m \neq n \neq 0$  a los tesaerales. Por otro lado, el término  $\frac{1}{2} \omega^2 r^2 \cos^2 \varphi$  alude al potencial centrífugo.

El potencial perturbador teniendo en cuenta el término  $J_2$ , queda como

$$U_{2,0} = -\frac{\mathcal{G}M}{r} \left( \frac{R_T}{r} \right)^2 J_2 \frac{1}{2} (3 \sin^2 \varphi - 1). \tag{A.11}$$

Es importante recalcar que esta principal perturbación modifica las expresiones de la variación de dos de los elementos orbitales, en concreto la del argumento del periastro ( $\dot{\omega}$ ) y el ángulo del nodo ( $\dot{\Omega}$ ), siendo éstas ahora

$$\begin{aligned}\frac{d\omega}{dt} &= - \left[ \frac{3}{2} \frac{\sqrt{\mu} J_2 R_T}{(1-e^2)^2 r^{\frac{7}{2}}} \right] \left( \frac{5}{2} \sin^2 i - 2 \right), \\ \frac{d\Omega}{dt} &= - \left[ \frac{3}{2} \frac{\sqrt{\mu} J_2 R_T}{(1-e^2)^2 r^{\frac{7}{2}}} \right] \cos i.\end{aligned}\tag{A.12}$$

## Apéndice B

# Oscilador armónico forzado

El oscilador armónico forzado es una variación del oscilador armónico simple. Este primero es un sistema físico que oscila alrededor de un punto de equilibrio estable. Este sistema viene descrito por una ecuación lineal ordinaria homogénea de segundo orden y su expresión viene dada por

$$mx'' + kx = 0, \quad (\text{B.1})$$

donde  $m$  hace referencia a la masa del cuerpo del sistema y  $k$  a la constante elástica de resorte.

A diferencia de éste, el oscilador armónico forzado es el mismo sistema pero sobre el que se aplica una fuerza externa de forma que ahora la ecuación diferencial que describe el movimiento es lineal ordinaria de segundo orden pero no homogénea. Su expresión viene dada por

$$mx'' + kx = F(t). \quad (\text{B.2})$$

En este trabajo, en el caso del potencial tipo Manev, se tiene  $m = 1$ ,  $k = \frac{-2\varepsilon}{G^2} + 1$  y  $F(t) = \frac{\mu}{G^2}$  quedando la EDO como

$$x'' + x \left( \frac{-2\varepsilon}{G^2} + 1 \right) = \frac{\mu}{G^2}. \quad (\text{B.3})$$

Esta EDO tiene como solución complementaria

$$x_c = C_1 \cos \theta t + C_2 \sin \theta t, \quad (\text{B.4})$$

y como solución particular

$$x_p = \frac{\mu}{G^2}. \quad (\text{B.5})$$

La solución general compuesta por la suma de las dos soluciones queda de la siguiente forma,

$$x = x_c + x_p = C_1 \cos \theta t + C_2 \sin \theta t + \frac{\mu}{G^2}. \quad (\text{B.6})$$

Como  $C_1$  y  $C_2$  son dos constantes arbitrarias, es decir, es un vector cualquiera  $(C_1, C_2)$  de  $\mathbb{R}^2$ , se puede establecer la siguiente relación

$$(C_1, C_2) = A(\cos \phi, \sin \phi), \quad (\text{B.7})$$

Donde  $A = \|(C_1, C_2)\|$  y  $\phi \in [0, 2\pi]$ . Teniendo esto en cuenta, la solución se puede escribir (tras aplicar identidades trigonométricas) como

$$x = A \cos(\theta t + \phi) + \frac{\mu}{G^2}, \quad (\text{B.8})$$

donde  $A$  se denota como la amplitud de oscilación, y  $\theta + \phi$  como la fase del oscilador siendo  $\phi$  la fase inicial de éste.



**UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID**

**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS**

**Máster en Nuevas Tecnologías Electrónicas y Fotónicas**



**TRABAJO DE FIN DE MÁSTER**

**Procesado de Imágenes de Superficies Acuáticas mediante técnicas de Deep Learning.**

**Autor**

**Pedro Luis Ortega Pérez**

**Tutores**

**María José Gómez Silva**

**Jesús Chacón Sombría**

**Curso académico 2023-24**

**Convocatoria febrero**



## **Resumen:**

Este Trabajo Fin de Máster se centra en la identificación y análisis de cianobacterias en cuerpos de agua utilizando herramientas de procesamiento de imágenes y técnicas de aprendizaje profundo. Basándose en la hipótesis de que las cianobacterias alteran la distribución de los píxeles en los canales verde y azul del espectro RGB y en el canal de saturación del espectro HSV, se desarrollaron análisis de imágenes. Se implementaron modelos de segmentación semántica DeepLabV3+ y U-Net++ para segmentar imágenes de cuerpos de agua y cianobacterias. El estudio se dividió en dos fases: primero, el análisis de imágenes de agua utilizando DeepLabV3+, y segundo, el análisis de imágenes con cianobacterias usando U-Net++. Se desarrollaron y aplicaron herramientas de análisis de imágenes para ambas fases, permitiendo la identificación precisa de cianobacterias y un mejor entendimiento de su presencia en ecosistemas acuáticos.

## **Palabras clave:**

Procesamiento de Imágenes, Pixel, Aprendizaje Automático, Aprendizaje Profundo, Redes Neuronales Convolucionales (CNN), Cianobacterias, Ficocianina, Histograma.





**Abstract:**

This Master's Thesis focuses on the identification and analysis of cyanobacteria in bodies of water using image processing tools and deep learning techniques. Based on the hypothesis that cyanobacteria alter the pixel distribution in the green and blue channels of the RGB spectrum and in the saturation channel of the HSV spectrum, image analyses were developed. Semantic segmentation models DeepLabV3+ and U-Net++ were implemented to segment images of water bodies and cyanobacteria. The study was divided into two phases: first, the analysis of water images using DeepLabV3+, and second, the analysis of images with cyanobacteria using U-Net++. Image analysis tools were developed and applied for both phases, allowing for precise identification of cyanobacteria and a better understanding of their presence in aquatic ecosystems.

**Keywords:**

Image Processing, Pixel, Machine Learning, Deep Learning, Convolutional Neural Networks (CNN), Cyanobacteria, Phycocyanin, Histogram.



## **Agradecimientos**

A mi familia, a mis amigos y a mis seres queridos por estar presentes siempre que lo he necesitado.



# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>65</b>
1.1. Contexto y relevancia . . . . .	65
1.2. Antecedentes . . . . .	67
1.3. Motivación y objetivos . . . . .	70
<b>2. Metodología</b>	<b>72</b>
2.1. Fundamentos teóricos . . . . .	72
2.1.1. Deep Learning . . . . .	72
2.2. Metodología de la investigación . . . . .	76
2.2.1. Datos y herramientas . . . . .	76
2.2.2. Estructura y planificación . . . . .	78
<b>3. Resultados</b>	<b>80</b>
3.1. Desarrollo y ensayos . . . . .	80
3.1.1. Inicialización modelo segmentación DeepLabV3+ . . . . .	80
3.1.2. Inicialización modelo segmentación UNet++ . . . . .	87
3.1.3. Ensayo 1. Estudio sobre colonia de cianobacteria . . . . .	88
3.1.4. Ensayo 2. Estudio HSV . . . . .	90
3.1.5. Ensayo 3. Estudio agua-cianobacteria . . . . .	91
3.2. Análisis de los resultados . . . . .	93
3.2.1. Ensayo 1. Estudio sobre colonia de cianobacteria . . . . .	93
3.2.2. Ensayo 2. Estudio HSV . . . . .	95
3.2.3. Ensayo 3. Estudio agua-cianobacteria . . . . .	97
<b>4. Conclusiones</b>	<b>100</b>
<b>Referencias</b>	<b>102</b>

## Índice de figuras

1.1. Vistas de floración de cianobacterias en el Lago Milford de Kansas, EEUU [1]. . . . .	65
1.2. Vehículos de Superficie Autónomos (ASVs) con de sistemas de visión artificial. Imagen proporcionada por el centro. . . . .	69
2.1. Esquema general de una red neuronal convolucional (imagen tomada de [2]) . . . . .	73
2.2. Representación IoU. . . . .	75
2.3. Representación Dice Score. . . . .	75
2.4. Ejemplo del primer conjunto de imágenes. . . . .	76
2.5. Ejemplos del segundo conjunto de imágenes . . . . .	77
2.6. Diagrama de flujo de trabajo. . . . .	79
3.1. Resultado gráfico de la inicialización del primer modelo. . . . .	81
3.2. Comparativa máscara e imagen con máscara del primer modelo. . . . .	83
3.3. Resultado de la implementación del algoritmo 3.1. . . . .	84
3.4. Comparación imagen escala de grises con espectro. . . . .	85
3.5. Análisis de componente principales. . . . .	85
3.6. Comparativa imagen principal e imagen reconstruida. . . . .	86
3.7. Resultado gráfico de la inicialización del segundo modelo. . . . .	88
3.8. Comparativa máscara e imagen con máscara del segundo modelo. . . . .	88
3.9. Resultado de la implementación del algoritmo 3.1 sobre imágenes con cianobacterias. . . . .	89
3.10. Comparación imagen con cianobacterias en escala de grises con espectro. . . . .	89
3.11. Análisis de componente principales para imagen con cianobacteria. . . . .	89
3.12. Comparativa imagen principal e imagen reconstruida para imagen con cianobacteria. . . . .	90
3.13. Resultado de la implementación del algoritmo 3.4 sobre imágenes con cianobacterias. . . . .	91
3.14. Resultado gráfico de la inicialización del segundo modelo para imágenes con zonas de agua y cianobacterias bien diferenciadas. . . . .	91
3.15. Comparativa máscara e imagen con máscara sobre cianobacteria y sobre agua. . . . .	92
3.16. Comparativa histogramas RGB sobre imágenes con cianobacterias. . . . .	93
3.17. Gráfica de la moda para cada canal RGB. . . . .	94
3.18. Comparativa de TF2D sobre imágenes con cianobacterias. . . . .	95
3.19. Comparativa de PCA sobre imágenes con cianobacterias. . . . .	95
3.20. Comparativa histogramas HSV sobre imágenes con cianobacterias. . . . .	96
3.21. Mala segmentación del modelo. . . . .	96
3.22. Imagen con partes de cianobacteria y agua bien diferenciadas. . . . .	97
3.23. Comparativa histogramas RGB imagen segmentada agua y cianobacterias y su di- ferencia. . . . .	98
3.24. Gráfica de la moda para cada canal RGB. . . . .	98

# 1. Introducción

## 1.1. Contexto y relevancia

En la última década, la influencia de la actividad humana sobre el medio ambiente ha alcanzado un punto crítico, evidenciando la interconexión entre el desarrollo humano y la salud de nuestros ecosistemas acuáticos. Uno de los fenómenos más preocupantes es el aumento significativo de nutrientes inorgánicos en lagos y aguas estancadas, un proceso conocido como eutrofización, proceso en el que esta acumulación excesiva de nutrientes, esencialmente nitrógeno y fósforo, suele ser resultado de actividades agrícolas, industriales y urbanas, y se ve exacerbada por los efectos del cambio climático.



Figura 1.1: Vistas de floración de cianobacterias en el Lago Milford de Kansas, EEUU [1].

El cambio climático, a través de patrones climáticos alterados y temperaturas más cálidas, ha contribuido de manera directa al incremento de episodios de floraciones algales. Estas floraciones no solo alteran la estética y la calidad del agua, sino que también tienen consecuencias nefastas para los ecosistemas acuáticos. Entre los principales impactos se encuentra la aparición y proliferación de algas nocivas, especialmente las cianobacterias. Estas algas, bajo ciertas condiciones, pueden producir toxinas que son perjudiciales tanto para la vida acuática como para los seres humanos.

Como se comentaba anteriormente, en la última década se ha evidenciado un aumento significativo de las floraciones de colonias de cianobacterias alrededor de lagos de todo el mundo [3], a excepción de Oceanía. En [3] se elabora también una base de datos a nivel mundial de floraciones, utilizando casi 3 millones de imágenes de satelitales desde el inicio de la década de los 80 hasta 2019, para caracterizar las floraciones de algas en el 57 % de los lagos de agua dulce del planeta. En el artículo anteriormente citado, se evidencia también que los continentes donde mayor incremento ha existido de estas colonias, son en Asia y África. En Estados Unidos también hay evidencia científica sobre el aumento de estas floraciones en sus aguas interiores, en trabajos como [1] o en [4], como consecuencia de la eutrofización del agua.

Como también se ha comentado antes, la eutrofización (aumento de nitrógeno y fósforo) conlleva las floraciones de estas algas. La presencia excesiva de algas en la superficie del agua impide la penetración de la luz solar y reduce los niveles de oxígeno en el agua, lo que produce un impacto ambiental vasto y multifacético. En primer lugar, como indica también los estudios [4] y [5], las cianobacterias (en la bibliografía se puede encontrar con las siglas CHABs, *Cyanobacterial Harmful Algal Blooms*) pueden producir toxinas (cianotoxinas y biotoxinas), que provocan efectos inmediatos o prolongados en la salud de mamíferos (incluyendo a los seres humanos) y otros seres vivos, como la anatoxina, que produce un efecto paralizante. Esto puede provocar la muerte de peces y otros organismos acuáticos. Esta disminución de la biodiversidad acuática tiene efectos en cascada, alterando las cadenas alimenticias y el equilibrio ecológico de estos hábitats. Sobre los mamíferos, originan efectos gastrointestinales, dermatológicos e incluso la muerte, como ocurrió en 2020 en el delta del río Okavanga, Botsuana, en el que murieron centenares de elefantes por intoxicación al beber de aguas contaminadas por cianobacterias. De este hecho se hacen eco artículos científicos como [6] y noticias informativas [7].

Desde una perspectiva socioeconómica, las consecuencias son igualmente graves. Las floraciones de algas pueden tener un impacto directo en la industria pesquera, reduciendo las poblaciones de peces y afectando el sustento de comunidades que dependen de la pesca. Además, la contaminación del agua con toxinas de cianobacterias representa un riesgo para la salud pública, limitando el uso recreativo de cuerpos de agua y elevando los costos de tratamiento del agua para consumo humano. En el estudio [8] realizado por la Universidad de Sherbrooke, Montreal, hacen una revisión del impacto económico en la salud humana contabilizando los gastos de atención médica y medicamentos, entre otros gastos.

En este contexto toma relevancia como realizar el tratamiento y la gestión de las floraciones de algas, ya que son desafíos complejos que requieren enfoques integrados y basados en la ciencia. Aquí es donde entra en juego el papel crucial de la investigación y la innovación tecnológica, especialmente en el campo del procesamiento de imágenes y el aprendizaje profundo (deep learning).



En una primera instancia, la evaluación de estas aguas se realizaba mediante análisis de concentraciones de células de fitoplancton en laboratorios mediante microscopía, lo cual tenía las siguientes limitaciones: era un método lento, tedioso y a su vez caro; falta de información por no tener una visión general a gran escala del agua contaminada con cianobacterias; incapacidad de monitoreo en tiempo real.

Para solventar estas adversidades se recurre al monitoreo de las colonias de cianobacterias mediante el análisis de imágenes. Estas imágenes en la actualidad vienen de dos fuentes, imágenes satelitales o imágenes recogidas en superficie mediante robots autónomos, ASVs (del inglés *Autonomous Surface Vehicles*). En cuanto a la detección mediante satélites, se observa que, aunque este método sí podemos analizar colonias a grandes escalas, también tiene sus limitaciones, como la variabilidad que producen corrientes acuáticas y la acción del viento. Además, en [9] se muestra una gran variabilidad de su migración vertical (comportamiento adaptativo donde estas bacterias se mueven a lo largo de la columna de agua en respuesta a cambios en el ambiente) en su estudio realizado sobre aguas del mar Báltico. También sobre estas aguas, en [10] se compararon 3 métodos de monitoreo de colonias de cianobacterias, las ya comentadas basadas en microscopía e imágenes satelitales, y una tercera en la que se analiza la fluorescencia de ficocianina (pigmento fotosintético presente en las cianobacterias, que les confiere un color azul-verdoso) con un sistema montado (*FerryBox system*) en un buque mercante. En este estudio se llega a la conclusión de que las imágenes obtenidas por satélite no son eficientes en aguas someras, es decir, poco profundas, como pueden ser las más próximas a costa.

En resumen, las imágenes satelitales han supuesto un gran avance en el análisis y monitoreo de colonias de cianobacterias, pero existen aún limitaciones. Una línea de investigación en ciernes es la adquisición de base de datos de imágenes mediante los previamente comentados ASVs equipados con cámaras, para ser procesado posteriormente por técnicas de deep learning, como la segmentación semántica.

## **1.2. Antecedentes**

En este apartado se expondrá el estado del arte de la segmentación semántica y más en concreto, su aplicación en la detección de colonias de cianobacterias. La segmentación semántica, que consiste en, utilizando redes neuronales convolucionales (CNN por sus siglas en inglés) la clasificación de diferentes clases u objetos de una una imagen, según las características de cada píxel. En [11] se realiza revisión de las últimas investigaciones en métodos de segmentación semántica basados en deep learning. Los usos más avanzado son en el campo de la medicina para identificar tumores, órganos y otras estructuras anatómicas [12, 13, 14]; y en el campo de la automoción, más en concreto en vehículos autónomos [15] para entender el entorno, identificando peatones, vehículos,

señales de tráfico, etc.

El desarrollo de modelos avanzados de segmentación de imágenes, como se aborda en este trabajo, permite una monitorización más eficiente y detallada de las floraciones de algas. Al identificar y cuantificar de manera precisa la extensión de estas floraciones, es posible tomar medidas más informadas y efectivas para su control y mitigación.

A comienzos del año 2023 se publica el primer trabajo relativo a la aplicación de técnicas de deep learning para la detección de colonias de cianobacterias. El artículo presentado por científicos de la Liaoning Technical University, Fuxin, y del Nanjing Institute of Geography and Limnology, Chinese Academy of Sciences, Nanjing, China [16] aborda un enfoque innovador para el monitoreo ambiental de floraciones de cianobacterias en las zonas cercanas a la orilla del lago Chaohu. El lago Chaohu, un lago con altas concentraciones de agua en estado de eutrofización significativo en China, es el foco de esta investigación. Se implementó una red de cámaras en la orilla para capturar imágenes de video en tiempo real y dinámico, usando tecnología multihilos para recopilar datos cada hora de 43 cámaras distribuidas alrededor del lago.

La clave del estudio es la aplicación de técnicas de segmentación semántica para identificar y cuantificar la presencia de floraciones de cianobacterias en las imágenes. Para optimizar la precisión del reconocimiento, se integraron tres modelos avanzados de segmentación semántica: *FCN*, *U-net* y *DeepLabV3+*, reforzados por la red *ResNet-50*. La comparativa entre estos métodos reveló que *DeeplabV3+ (ResNet-50)* proporciona los límites más claros y precisos, alineándose estrechamente con la distribución espacial real de las floraciones y adaptándose eficientemente a los cambios por hora.

Los resultados indican que este enfoque satisface la necesidad de monitorización horaria en tiempo real, destacando, como se ha comentado previamente, la superioridad de *DeeplabV3+ (ResNet-50)*, esto es, en términos de métricas como Precisión General (OA), Precisión Media de Píxeles (MPA), Intersección Sobre Unión (IOU) de floraciones de cianobacterias y agua, y un bajo error cuadrático medio (RMSE) del 6.65% en la predicción de cobertura de floraciones. Estas capacidades demuestran que *DeeplabV3+(ResNet-50)* es el modelo más efectivo para este tipo de monitoreo. Esta técnica ofrece soporte técnico crucial para el manejo científico de floraciones de cianobacterias en el lago Chaohu, proporcionando una estimación precisa del área afectada y un detallado mapeo de su distribución.

Posteriormente, en abril de 2023, científicos de la Universidad Complutense de Madrid presentan un artículo [17] que aborda también la creciente problemática de las floraciones de algas nocivas de cianobacterias en cuerpos de agua. La diferencia principal con [16] es un método innovador para la adquisición de imágenes, utilizando Vehículos de Superficie Autónomos (ASVs) dotados

de sistemas de visión artificial para identificar las cianobacterias (véase Fig. 1.2), usado en el Parque Nacional de Monfragüe, Cáceres. Este enfoque se basa de igual modo en el aprendizaje profundo y el uso de Redes Neuronales Convolucionales (CNNs) para la segmentación semántica de imágenes, aprovechando la arquitectura convolucional de estos modelos para captar detalles espectrales y texturales de los píxeles y su entorno. En este estudio se emplean modelos como *UNet++*, *FPN*, *PSPNet* y *DeepLabV3+*, y codificadores *ResNet50* y *EfficientNet-b6*, enfocándose en la detección temprana de las floraciones.



Figura 1.2: Vehículos de Superficie Autónomos (ASVs) con de sistemas de visión artificial. Imagen proporcionada por el centro.

Dada la dificultad de obtener imágenes reales de cianobacterias, debido a su aparición irregular y dispersa, el estudio se centra en la creación de datos sintéticos. Se desarrollaron tres conjuntos de datos: uno con ejemplos reales limitados de cianobacterias, otro con parches sintéticos creados mediante la Red Generativa Antagónica Adaptativa basada en Estilo (StyleGAN2-ADA), y un tercero que combina ambos.

Tras evaluar cada modelo con los diferentes conjuntos de datos en imágenes de prueba reales, se determinó que *UNet++* con *EfficientNet-b6*, entrenado con el tercer conjunto, mostró la mejor generalización y eficacia. Este hallazgo subraya la efectividad del método propuesto para la detección

temprana de cianobacterias, lo que representa un avance significativo en la protección de la salud y el medio ambiente acuático.

El último trabajo del que se tiene constancia en este campo es el Trabajo de Fin de Máster de una alumna de la Universidad Complutense de Madrid [18], que se diferencia de los estudios anteriores principalmente en su enfoque en el uso de dispositivos Edge para el análisis de cianobacterias, reduciendo la carga y el costo comparado con otros métodos. A diferencia de las investigaciones previamente citadas, que emplean redes de cámaras fijas o vehículos autónomos, este TFM se centra en mejorar el rendimiento y la calidad en entornos Edge (*Edge Computing*), utilizando la arquitectura *UNet++* con extractores de características pre-entrenados, y considera el aprendizaje semisupervisado como línea de investigación futura.

### **1.3. Motivación y objetivos**

La motivación de este trabajo es explorar y mejorar la capacidad de monitorear y comprender las dinámicas de los cuerpos de agua a través de técnicas avanzadas de procesamiento de imágenes y aprendizaje profundo. Frente al creciente problema de contaminación por cianobacterias en lagos y ríos, intensificado por factores ambientales y humanos, se presenta la oportunidad de utilizar la segmentación semántica y el deep learning para identificar y analizar estos cambios.

En cuanto a objetivos, en primer lugar se pretende realizar una documentación profunda y exhaustiva sobre las colonias de cianobacterias, su proliferación, sus impactos ambientales y socioeconómicos y los estudios realizados en este campo.

Otro objetivo será adquirir y consolidar conocimientos en deep learning y redes neuronales, con un enfoque específico en la segmentación semántica, aplicados al procesamiento de imágenes acuáticas.

Así mismo se usará un modelo de segmentación semántica *DeepLabV3+* para un dataset de imágenes con personas realizando actividades relacionadas con el piragüismo. Sobre esta imagen segmentada se prepararán las herramientas de análisis de las imágenes acuáticas.

Por últimos se pretende inicializar un modelo de segmentación basado en arquitectura *UNet++*, proporcionado por la autora del trabajo [18], que se utilizará en un dataset de imágenes de cuerpos acuáticos contaminados por colonias de cianobacterias, y al igual que con el anterior modelo, procesar la imagen segmentada mediante las herramientas previamente computadas en el paso anterior e investigar alguna variable obtenida con estas herramientas que nos haga indicar la presencia de cianobacterias.

En resumen, el presente Trabajo de Fin de Máster tiene como objetivos alcanzar conocimientos

suficientes en deep learning, más en concreto en segmentación semántica, y en la proliferación de colonias de cianobacterias en en cuerpos de aguas; inicializar los modelos de segmentación semántica proporcionados; y analizar mediante técnicas de procesado de imágenes los cuerpos de agua para una detección eficiente de las colonias de cianobacterias.

## 2. Metodología

### 2.1. Fundamentos teóricos

#### 2.1.1. Deep Learning

El deep learning, o aprendizaje profundo, es un subcampo de la inteligencia artificial que se centra en el uso de redes neuronales profundas. Estas redes están compuestas por múltiples capas de nodos o neuronas, imitando la estructura y funcionamiento del cerebro humano, lo que permite al modelo aprender de grandes cantidades de datos de forma jerárquica. El 'profundo' en deep learning se refiere a la cantidad de capas a través de las cuales pasa la información, permitiendo que el sistema reconozca patrones complejos y abstractos. Ocasionalmente se confunden los términos machine learning y deep learning y la diferencia fundamental entre ambas está en cómo aprende cada algoritmo. Según el IBM (ref. [19]), el machine learning profundo *'puede utilizar conjuntos de datos etiquetados, lo que se conoce también como aprendizaje supervisado, para informar a su algoritmo, pero no requiere necesariamente un conjunto de datos etiquetado'*, mientras que el deep learning *'puede consumir datos no estructurados en formato bruto (imágenes) y puede determinar automáticamente el conjunto de características que distinguen las distintas categorías de datos entre sí'*. Es decir, el deep learning se diferencia del machine learning en los tipos de datos que procesa y las técnicas específicas que emplea para aprender. Como concepto, el deep learning es un subcampo de las redes neuronales, las redes neuronales un subcampo del machine learning, y por último este, un subcampo de la inteligencia artificial.

Las redes neuronales artificiales (ANN) se componen de unidades básicas llamadas neuronas o nodos, organizadas en capas que procesan la entrada de datos en paralelo y la transforman a través de una serie de funciones, es decir, se tienen unos nodos de entrada, que devuelven una salida a través de estas funciones que están implementadas en las capas ocultas. Existen varios tipos de redes neuronales:

- **Redes Neuronales Estándar:** Son las de estructura más sencilla. Un ejemplo clásico es usado para la venta de bienes inmuebles, donde las entradas pueden ser el tamaño de la casa, las características, la zona y la proximidad a servicios urbanos, y estas entradas dan como salida la predicción del precio de la vivienda.
- **Redes Neuronales Recurrentes (RNN):** Capaces de mantener un estado interno o memoria, son útiles para tareas donde existe una componente temporal, como el reconocimiento de voz para transcripciones o traducciones.
- **Redes Neuronales Convolucionales (CNN):** Especializadas en procesar datos con una topología en forma de rejilla, como imágenes.

- Redes Neuronales Complex/Hybrid: es una combinación de las anteriores utilizada en la conducción de vehículos autónomos.

Las CNN son un tipo de redes neuronales que incluyen capas convolucionales, cuya operación principal es la convolución. En el contexto de una imagen, la convolución es una operación matemática que se realiza sobre pequeñas regiones de la imagen (filtros) para extraer características relevantes como bordes, texturas, etc. En la Fig. 2.1 se muestra la arquitectura de una red neuronal convolucional típica, usada en [2] para un algoritmo evolutivo aplicado a un proceso de soldadura industrial, dividida en dos partes, *Feature Learning* que consta de  $N$  bloques convolucionales compuesto por una capa convolucional seguida de una función de activación ReLU (*Rectified Linear unit*) y una capa de agrupamiento (pooling); y la parte de *classification* donde tras los bloques convolucionales, la arquitectura se aplana y se conecta a una capa *fully connected layer*, que tiene la tarea de combinar las características aprendidas para realizar la clasificación y da a la salida la clasificación o etiquetas de la imagen de entrada.

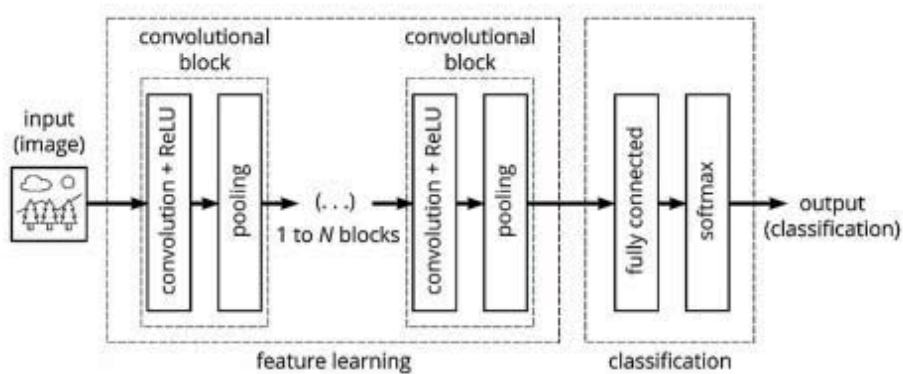


Figura 2.1: Esquema general de una red neuronal convolucional (imagen tomada de [2])

La capa convolucional aplica varios filtros a la imagen de entrada para extraer características. Los filtros son matrices pequeñas que se deslizan sobre la imagen para detectar patrones como bordes, texturas, etc. La función ReLU es una función de activación que convierte todos los valores negativos en cero y mantiene los valores positivos sin cambios. En este caso la función softmax se aplica a la salida de la última capa completamente conectada. Esta función convierte las salidas en probabilidades que suman 1, permitiendo interpretar la salida como la probabilidad de que la entrada pertenezca a cada una de las categorías de clasificación.

La segmentación de imágenes es un proceso que divide una imagen digital en varias regiones. Cada región se clasifica según la información contenida en ella. Los tres tipos de segmentación de imágenes son la segmentación semántica, la segmentación de instancias y la segmentación panóptica. La segmentación semántica, la cual nos atañe en este trabajo, clasifica cada región

según su contenido, es decir, etiqueta cada píxel de una imagen por su clase semántica [20], de manera que píxeles con la misma etiqueta compartan cierta característica o semántica común.

Este proceso se realiza mediante modelos de segmentación, que generan un esquema de segmentos a partir de una imagen inicial. Este esquema, conocido como mapa de segmentación, reinterpreta la imagen original asignando a cada píxel una categoría semántica específica para formar distintas máscaras de segmentación. Estas máscaras identifican secciones de la imagen, diferenciándolas del resto. Un ejemplo muy recurrente para escenificar este concepto es el de un mapa de segmentación que muestra un árbol en un campo despejado, que se distinguirían probablemente tres áreas: una correspondiente al árbol, otra al terreno y una más al cielo.

Los modelos usados en este trabajo son:

- UNet++: Es una arquitectura de red neuronal que evoluciona de la UNet original, introduciendo conexiones más densas entre las capas de codificación y decodificación, lo que mejora la capacidad de aprendizaje de características y mejora la precisión de la segmentación.
- DeepLabV3+: Este modelo representa una evolución de las versiones previas de DeepLab. Integra una secuencia de convoluciones dilatadas que permiten recopilar información contextual en diversas escalas espaciales. Además, mejora el proceso de decodificación de la imagen, lo que resulta en segmentaciones más exactas y detalladas.

Es importante en este momento conocer también las métricas *IoU* (Intersección sobre Unión) y *Dice Score*, que se utilizan en los modelos de segmentación semántica para evaluar la precisión con la que el modelo ha podido segmentar y clasificar las diferentes partes de una imagen en comparación con las anotaciones verdaderas (*ground truth*).

El *IoU*, o índice de Jaccard, mide la superposición entre la predicción del modelo y la anotación verdadera. Se calcula como el área de intersección entre la predicción y el *ground truth* dividida por el área de la unión de ambos, como se muestra en la Fig. 2.2 y en la ecuación 2.1.

$$IoU(A, B) = \frac{|A \cap B|}{|A \cup B|} \quad (2.1)$$



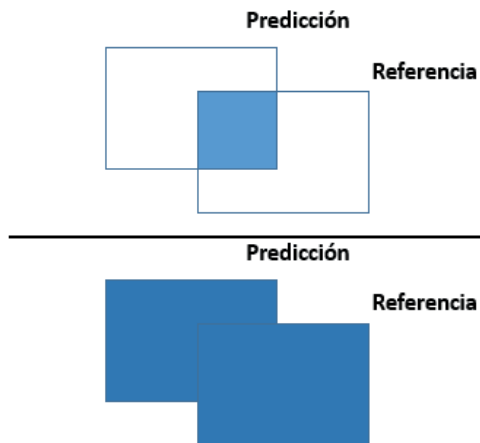


Figura 2.2: Representación IoU.

Un *IoU* alto indica que la predicción del modelo se alinea estrechamente con la anotación verdadera, lo que sugiere una mayor precisión en la segmentación.

El *Dice Score* o Coeficiente de Sørensen-Dice, al igual que el *IoU*, evalúa la similitud entre la predicción del modelo y la anotación verdadera. Se calcula como el doble del área de intersección entre la predicción y el ground truth dividido por la suma de los píxeles en ambas, la predicción y la anotación verdadera, como se ilustra en la Fig. 2.3 y en la ecuación 2.2.

$$Dice(A, B) = \frac{2 \times |A \cap B|}{|A| + |B|} \quad (2.2)$$

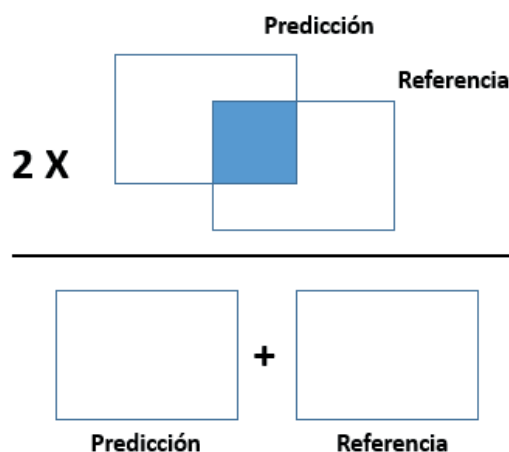


Figura 2.3: Representación Dice Score.

Un Dice Score alto indica una gran superposición entre la predicción y la anotación verdadera,

reflejando una alta precisión en la segmentación.

Ambas métricas son fundamentales para entender la eficacia de un modelo de segmentación semántica, permitiendo a los investigadores y desarrolladores optimizar sus modelos para una mejor precisión en la detección y clasificación de diferentes objetos dentro de las imágenes.

## 2.2. Metodología de la investigación

### 2.2.1. Datos y herramientas

Los datos para esta investigación fueron proporcionados por el Departamento de Arquitectura de Computadores y Automática de la Facultad de Ciencias Físicas de la Universidad Complutense de Madrid. En un primer instante se proporcionó un conjunto de 86 imágenes en formato PNG (*Portable Network Graphics*), de una resolución que comprendían unos valores desde 1663 x 800, hasta 533 x 800, que contenían, como se observa en la Fig. 2.4 personas en piraguas sobre superficies acuáticas. Estas imágenes fueron entregadas con sus correspondientes anotaciones.



Figura 2.4: Ejemplo del primer conjunto de imágenes.

Para este conjunto de imágenes se trabajó con un modelo de segmentación de imágenes basado en arquitectura *DeepLabV3+*, con el que segmentaba las imágenes en 5 clases: *Background*, *Person*, *Water*, *Canoe* y *Paddle*.

El segundo conjunto de datos y modelo de segmentación, también facilitados por el Departamento

de Arquitectura de Computadores y Automática de la Facultad de Ciencias Físicas de la Universidad Complutense de Madrid, fueron los realizados en el trabajo de la autora de [18]. Estos datos constan de un conjunto de entrenamiento de 377 imágenes de cuerpos de agua contaminada con cianobacterias y un conjunto de prueba de 97 imágenes de las mismas características, como se muestran en la Fig. 2.5. Todas fueron entregadas con una resolución de 224 x 224 y en formato PNG (*Portable Network Graphics*), y como cita la autora, son imágenes de *lagos que se encuentran ubicados en España*. Las anotaciones de estas imágenes fueron realizada por la autora del trabajo citado previamente mediante la herramienta web *V7 Darwin* [21]



Figura 2.5: Ejemplos del segundo conjunto de imágenes

Para segmentar imágenes de este conjunto, se proporcionó un modelo de segmentación basado en arquitectura *UNet++*, segmentando en 4 clases: agua contaminada con cianobacterias, agua, rocas y vegetación.

En cuanto a las herramientas utilizadas para el desarrollo e implementación de los modelos de segmentación, se ha usado la interfaz basada en navegador web 'Jupyter Notebook', entorno de desarrollo en Python. Las bibliotecas más relevantes utilizadas 'NumPy' [22] y 'Matplotlib' [23] para la manipulación y visualización de datos; 'OpenCV' [24] para el procesamiento de imágenes, 'scikit-image' [25] para algoritmos de procesamiento de imágenes avanzados y PCA; 'TensorFlow' [26] o 'Keras' [27] para la implementación y entrenamiento de redes neuronales convolucionales. Además, otras bibliotecas importantes fueron 'Os' [28] para la interacción con el sistema operativo; 'Seaborn' [29] para visualizaciones estadísticas avanzadas; 'Google.protobuf' [30] para la serialización y deserialización de estructuras de datos; 'Glob' [31] para la manipulación de nombres de archivos y rutas; 'Scipy.io' [32] para la entrada y salida de datos científicos; y 'PIL' [33] (Python Imaging Library) para la manipulación básica de imágenes.

Como herramientas para el análisis de los datos, se crean funciones para plotear histogramas de los canales RGB y de los canales HSV; función para medir el espectro de magnitud mediante la Transformada de Fourier 2D; y una función para estudiar el análisis de componentes principales (PCA).

### 2.2.2. Estructura y planificación

La metodología de este trabajo se planificó en función de cumplimentar los objetivos propuestos en la subsección 1.3. En primer lugar se realizó una profunda investigación sobre el qué son las cianobacterias, cuáles son sus impactos tanto ambientales como socioeconómicos y porqué se produce su proliferación, lo cual está documentado en la subsección 1.1. Tras esta documentación, conviene preguntarse ¿qué variable, usando herramientas de procesado de imágenes, nos indicará la presencia de esta cianobacteria nociva? Ante esta pregunta, y tras la revisión de la bibliografía, se puede formular la siguiente hipótesis: "La presencia de cianobacterias en cuerpos de agua afecta significativamente la distribución e intensidad de los píxeles en los canales verde y azul del espectro RGB, y del canal saturación del espectro HSV de las imágenes acuáticas". Esta hipótesis se basa en la premisa de que las cianobacterias contienen ficocianina, un pigmento fotosintético que le da ese tono característico y esa fluorescencia, pudiendo provocar cambios notorios en los canales verde o azul del espectro RGB (o cambios en el canal de saturación de HSV) en imágenes capturadas por sensores ópticos.

El siguiente paso en la investigación fue la iniciación en materia de deep learning, para ello se realizó los cursos preliminares de la referencia [34]. A finalización de dicho curso, se comprenden los principios básicos del aprendizaje profundo y los conceptos fundamentales de la programación de redes neuronales, así como los tipos de redes neuronales y porqué las redes neuronales convolucionales (CNN) y su arquitectura son las más eficaces para la segmentación de imágenes.

Con estos conocimientos adquiridos se procede al estudio de los artículos relacionados con la aplicación de la segmentación semántica para las colonias de cianobacterias. La documentación revisada se detalla en el estado del arte, en la subsección 1.2.

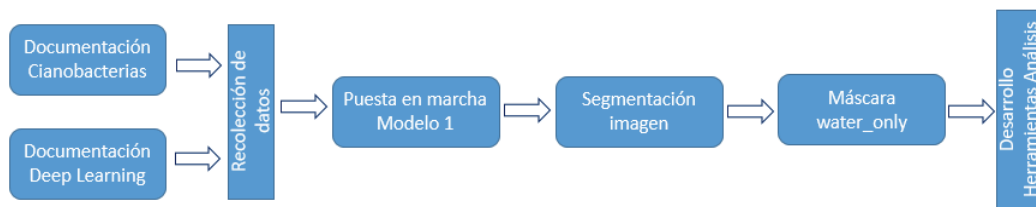
Se inicializa el modelo de segmentación basado en arquitectura *DeepLabV3+* para imágenes del primer conjunto de datos comentado antes en 2.2.1. Se segmenta la imagen en 5 clases y se realiza una máscara para el agua, poniendo las clases *Background*, *Person*, *Paddle* y *Canoe* a 0. Se aplica esta máscara sobre la imagen original y obtenemos una imagen con solo agua para ser posteriormente analizada. Sobre estas imágenes se desarrollan funciones que sirven como herramientas para analizar estas imágenes 'water\_only'.

La segunda fase del estudio fue la puesta en marcha del modelo de segmentación con arquitectura

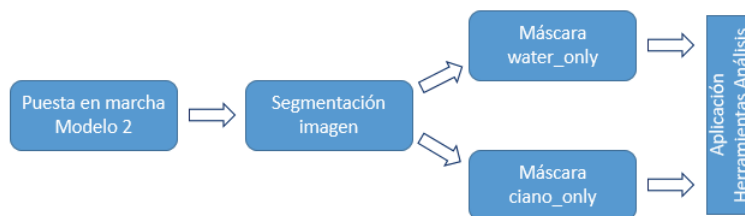
*UNet++* de la autora del trabajo [18] para segmentar imágenes del segundo conjunto de datos de cuerpos de agua con colonias de cianobacterias. Se sigue el mismo procedimiento que en la primera fase con el primer modelo, se segmenta la imagen y se realizan dos máscaras:

- Máscara para obtener imagen 'water\_only'. Se ponen todas las clases a 0 excepto el agua, y se aplica sobre la imagen original.
- Máscara para obtener imagen 'ciano\_only'. Se ponen todas las clases a 0 excepto las cianobacterias, y se aplica sobre la imagen original.

Sobre estas imágenes se aplican las herramientas de análisis previamente desarrolladas en la primera fase del trabajo. El diagrama de trabajo se ilustra en la Fig. 2.6.



(a) Primera fase del trabajo.



(b) Segunda fase del trabajo.

Figura 2.6: Diagrama de flujo de trabajo.

## 3. Resultados

### 3.1. Desarrollo y ensayos

#### 3.1.1. Inicialización modelo segmentación DeepLabV3+

La primera parte del desarrollo de la investigación fue la puesta en marcha del modelo de segmentación basado en arquitectura DeepLabV3+ suministrado por el centro. A continuación se expondrá las partes de este modelo, y después se detallará mediante pseudocódigos las ampliaciones realizadas y el desarrollo de herramientas de análisis para su posterior uso en otros ensayos.

El modelo *model-vgg16-deeplabv3+.h5*, se inicializa mediante el cuaderno de 'Jupyter Notebook' *Testing\_VGG16\_DeepLabV3+.ipynb*, también suministrado por el centro. En el se comienza con la carga de librerías necesarias, entre las que destacan 'Tensorflow' y 'h5py', la cual se detectó un problema de incompatibilidad con la versión de 'Numpy'.

El siguiente paso es la carga y preparación del dataset. La función *'get\_dataset\_slice\_paths'* genera dos listas de rutas: una para imágenes y otra para mapas de etiquetas. Primero, lista todos los archivos en los directorios proporcionados (*image\_dir* y *label\_map\_dir*), y luego crea rutas completas a estos archivos, asegurándose de que estén ordenadas antes de devolverlas. Se llama a la función con las rutas específicas para las imágenes de validación y las rutas a los mapas de etiquetas de validación. Estas listas se generarán a partir de los archivos contenidos en los directorios especificados para imágenes de prueba y segmentaciones de prueba, respectivamente. La siguiente función en este apartado es *'map\_filename\_to\_image\_and\_mask'*, que realiza el preprocesamiento de imágenes y sus correspondientes mapas de etiquetas, convirtiendo los archivos de imagen y etiqueta en tensores, luego los redimensiona al tamaño especificado ('height' y 'width'), para después normalizar los píxeles de la imagen para que estén en el rango [-1, 1] y reestructura los mapas de etiquetas para crear un tensor con un canal por cada clase definida en *'class\_names'*, identificando así qué píxeles pertenecen a cada clase. La función devuelve la imagen preprocesada y su correspondiente mapa de etiquetas en un formato adecuado para su posterior procesado.

Se prepara el conjunto de datos de validación para su uso con la función *'get\_validation\_dataset'*. Inicia creando un dataset de 'TensorFlow' a partir de listas de las rutas de imágenes y mapas de etiquetas, asociando cada imagen con su correspondiente mapa de etiquetas. Luego, aplica la función *'map\_filename\_to\_image\_and\_mask'* antes comentada para redimensionar, normalizar y reestructurar los datos. Los datos preprocesados se agrupan en lotes de un tamaño definido manualmente. La función configura el dataset para que se repita indefinidamente, y finalmente retorna el dataset preparado para su uso.

Tras llamar a la función *'get\_validation\_dataset'* se generan herramientas de visualización. Se

genera una paleta de colores para representar visualmente las clases definidas en *'class\_names'* utilizando la biblioteca 'Seaborn', se convierten estos colores en tuplas RGB normalizadas y para cada clase se asigna un color único de esta paleta. La función *'give\_color\_to\_annotation'* transforma mapas de etiquetas en imágenes a color, asignando colores específicos a cada clase de etiqueta. Estos colores se basan en la paleta definida anteriormente y se aplican a un array de 'NumPy' de los tres canales RGB. La función toma un mapa de etiquetas bidimensional y lo convierte en un array tridimensional donde el tercer eje representa el canal de color. Para cada clase definidas, busca todos los píxeles en el mapa de etiquetas que pertenecen a esa clase y les asigna el color correspondiente, multiplicando los valores normalizados de los colores por 255 para convertirlos en valores RGB estándar. El resultado es una imagen en color donde cada clase se visualiza en un color diferente.

Para finalizar la segmentación del modelo, se extrae un conjunto de prueba del conjunto de validación con la función *'get\_images\_and\_segments\_test\_arrays'* y se carga el modelo entrenado. Luego, se realiza la predicción sobre este conjunto de prueba. La función *'compute\_metrics'* calcula métricas de evaluación (*IoU* y *Dice*) para las predicciones. La función *'show\_predictions'* visualiza las imágenes originales, junto con las máscaras de segmentación predichas y reales, y muestra las métricas calculadas. Es decir, en detalle, se selecciona una muestra de imágenes y segmentaciones del conjunto de validación. El modelo cargado hace predicciones sobre estas imágenes. Las predicciones y los segmentos verdaderos se pasan a *'compute\_metrics'* para calcular el *IoU* y *Dice* para cada clase y por último, se visualiza cada imagen con sus máscaras predichas y reales, junto con las métricas. Las máscaras se colorean usando la función *'give\_color\_to\_annotation'*, que asigna un color único a cada clase en la máscara de segmentación para facilitar la comparación visual entre las predicciones del modelo, así como la evaluación del rendimiento del modelo en base a las métricas calculadas, como se muestra un ejemplo en la Fig. 3.1.

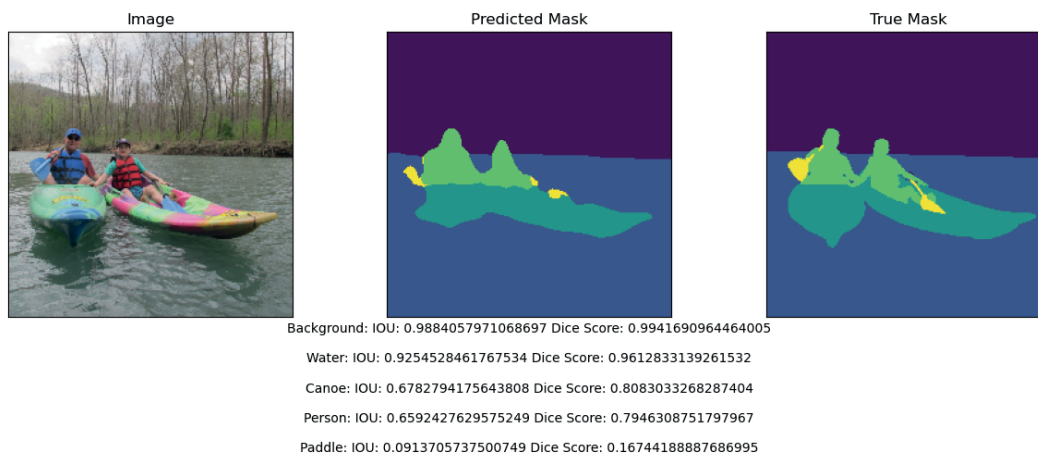


Figura 3.1: Resultado gráfico de la inicialización del primer modelo.

Se analiza una muestra aleatoria de las imágenes del dataset para comprobar el resultado de segmentación a través de las métricas *IoU* y *Dice*, como se muestra en los cuadros 3.1 y 3.2. De estos resultados se infiere que, para clases donde existen una mayor cantidad de píxeles, es decir, las clases que ocupan mayor espacio en la imagen, se realiza mejores predicciones. Para esta investigación, en la que nos interesa analizar la clase 'Water' las métricas dan un valor bastante alto, por lo que el modelo realiza una buena predicción.

Imagen	Clase 'Background'	Clase 'Water'	Clase 'Person'	Clase 'Canoe'	Clase 'Paddle'
0	0.969	0.936	0.680	0.370	0.070
2	0.963	0.945	0.608	0.438	0.102
7	0.769	0.730	0.724	0.477	0.029
8	0.977	0.838	0.750	0.215	0.176
10	0.996	0.975	0.436	0.530	-
16	0.952	0.876	0.575	0.509	0.306
18	0.938	0.880	0.434	0.186	0.035
19	0.956	0.762	0.734	0.590	0.066
26	0.934	0.720	0.538	0.559	0.427
32	0.988	0.925	0.678	0.659	0.091
<b>Promedio</b>	<b>0.944</b>	<b>0.858</b>	<b>0.618</b>	<b>0.453</b>	<b>0.130</b>

Cuadro 3.1: Resultados métricas *IoU*.

Imagen	Clase 'Background'	Clase 'Water'	Clase 'Person'	Clase 'Canoe'	Clase 'Paddle'
0	0.984	0.967	0.809	0.540	0.147
2	0.981	0.972	0.758	0.609	0.180
7	0.869	0.844	0.840	0.646	0.05
8	0.988	0.912	0.857	0.354	0.3
10	0.998	0.987	0.607	0.692	-
16	0.975	0.934	0.730	0.675	0.469
18	0.968	0.936	0.605	0.314	0.069
19	0.977	0.865	0.846	0.742	0.124
26	0.966	0.837	0.724	0.717	0.599
32	0.994	0.961	0.808	0.794	0.167
<b>Promedio</b>	<b>0.970</b>	<b>0.921</b>	<b>0.758</b>	<b>0.608</b>	<b>0.211</b>

Cuadro 3.2: Resultados métricas *Dice*.

Tras esto se desarrollan herramientas de análisis. Para ello en primer lugar se pretende realizar una máscara para obtener una imagen con solo la clase 'water'. Se inicializa 'water\_mask' como una matriz booleana donde los píxeles de agua son 'True' y se obtiene 'original\_image' en formato 'Numpy'. En este caso si el máximo de 'original\_image' es mayor que 1 o el mínimo es menor que 0, entonces se normaliza esta imagen en un rango [0, 1]. Ya por último se reasigna 'water\_mask'



para asegurar que '1' es la etiqueta correcta para agua y se crea la imagen 'water\_only\_image' aplicando 'water\_mask' sobre 'original\_image'.

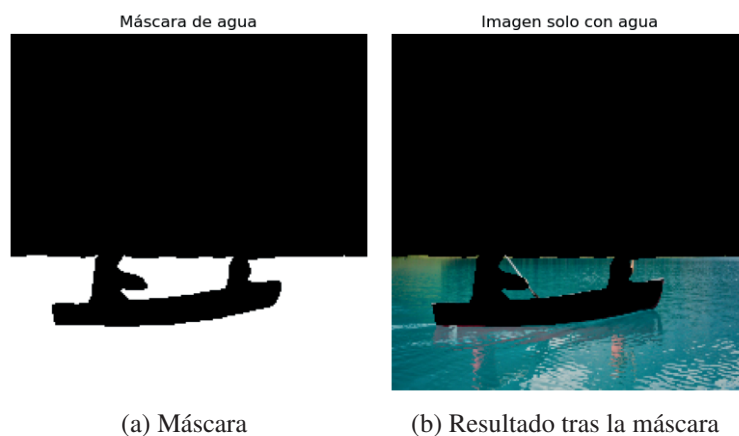


Figura 3.2: Comparativa máscara e imagen con máscara del primer modelo.

Con el resultado ilustrado en la Fig. 3.2 se obtiene la base sobre la que desarrollar los algoritmos de análisis que se creen que serán de utilidad para la detección de cianobacterias. En primer lugar se desarrolla un algoritmo para separar los canales RGB y realizar un histograma sobre cada canal, como se muestra en el pseudocódigo 3.1. Los canales se separan mediante el método '.flatten', se filtra el fondo negro y se dibujan los histogramas con la librería 'Numpy', visualizándose los resultados en la Fig. 3.3.

---

### Algorithm 3.1 Plotear Histogramas

---

- 1: Obtener imagen con solo agua
  - 2: Aplanar el canal rojo
  - 3: Aplanar el canal verde
  - 4: Aplanar el canal azul
  - 5: **procedure** PLOT\_HISTOGRAM(channel, title, color)
  - 6:     Filtrar valores mayores a 0 en channel
  - 7:     **if** channel está vacío **then**
  - 8:         Imprimir mensaje de datos insuficientes
  - 9:         **return**
  - 10:     **end if**
  - 11:     Calcular histograma del channel
  - 12:     Configurar y mostrar barras del histograma
  - 13:     Mostrar histograma
  - 14: **end procedure**
  - 15: Llamar PLOT\_HISTOGRAM(red\_channel, 'Histograma Rojo', 'red')
  - 16: Llamar PLOT\_HISTOGRAM(green\_channel, 'Histograma Verde', 'green')
  - 17: Llamar PLOT\_HISTOGRAM(blue\_channel, 'Histograma Azul', 'blue')
-

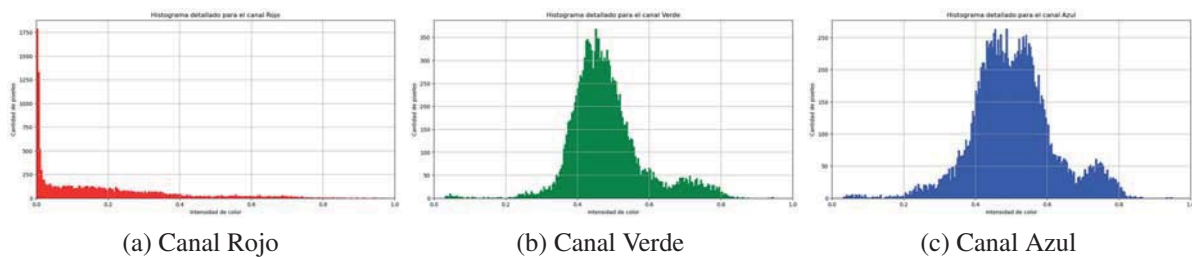


Figura 3.3: Resultado de la implementación del algoritmo 3.1.

En las gráficas de la Fig. 3.3 relativas a la imagen 3.2b se aprecia como hay una mayor cantidad de píxeles en los canales azul y verde. Esta herramienta servirá para cuando se analicen imágenes con cuerpos de agua contaminados por colonias de cianobacterias.

Otra herramienta que se desarrolla para su posible análisis es la transformada de Fourier. Se genera una función en el que se calcula la transformada de fourier de la imagen y se centra la componente de frecuencia 0 mediante los métodos 'np.fft.fftshift' y 'np.fft.fft2' de la librería 'Numpy'. Como entrada, la función tiene la imagen pasada a escala de grises usando la librería 'OpenCV'. Tanto la imagen pasada a escala de grises como el espectro se muestran la Fig. 3.4.

---

**Algorithm 3.2** Visualización del Espectro de Magnitud de la Transformada de Fourier 2D

---

- 1: **Entrada:** gray\_image, title='Espectro de Magnitud con Colormap'
  - 2: **Salida:** Visualización del Espectro de Magnitud
  - 3: **procedure** PLOTFFT2DSPECTRUM(gray\_image, title)
  - 4:     Calcular la Transformada de Fourier 2D de *gray\_image*
  - 5:     Centrar el componente de frecuencia 0
  - 6:     Aplicar escala logarítmica para obtener el espectro de magnitud
  - 7:     Obtener las dimensiones de *gray\_image*
  - 8:     Preparar las etiquetas de los ejes
  - 9:     Visualización de *gray\_image* y su espectro de magnitud
  - 10:    Mostrar los gráficos con títulos, colormaps, etiquetas y escalas
  - 11: **end procedure**
  - 12: Convertir imagen 'water\_only\_image' a escala de grises
  - 13: Aplicar PLOTFFT2DSPECTRUM(water\_gray\_image, título)
-

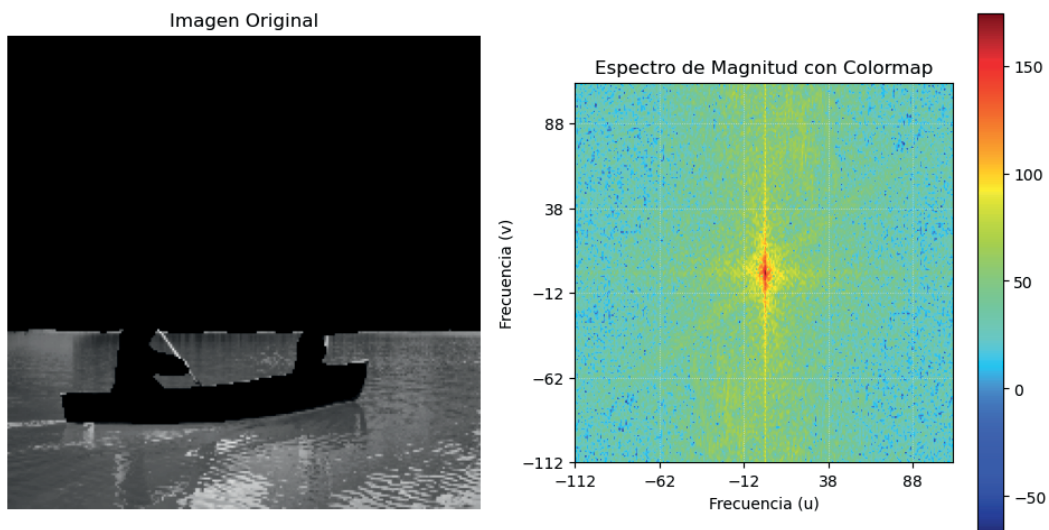


Figura 3.4: Comparación imagen escala de grises con espectro.

Se observa las bajas frecuencias en el centro y granulado o 'speckle' de altas frecuencias a medida que nos alejamos del centro que es debido a las ondulaciones que se forma en la superficie acuática o a los reflejos.

La última herramienta desarrollada es el análisis de componentes principales (PCA). Para ello se utiliza la librería 'Sci-kit Learn' en el que se aplanan y normalizan en un arreglo 'Numpy' la imagen y se transforman los datos originales a las nuevas coordenadas definidas por las 2 componentes principales. Se desarrolla otra función en el que se compara la imagen original con la imagen reconstruida a partir de las componentes principales.

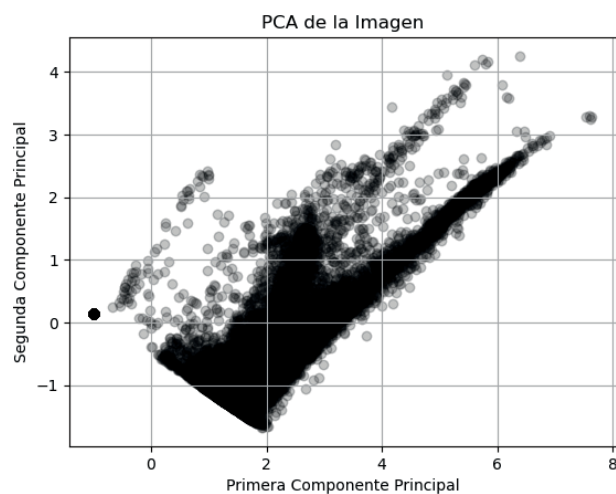


Figura 3.5: Análisis de componente principales.

La Fig. 3.5 es un gráfico de dispersión de los datos transformados por PCA. El eje x (horizontal)

representa la primera componente principal y el eje y (vertical) representa la segunda componente principal. Cada punto en este gráfico representa un píxel de la imagen en el espacio de componentes principales. La dispersión de los puntos muestra cómo los diferentes píxeles de la imagen se relacionan entre sí en términos de sus valores de píxel (intensidad y color) después de la normalización.

---

**Algorithm 3.3** Análisis de Componentes Principales PCA

---

```
1: procedure PLOTPCA(image_flat_normalized, n_components)
2:   Inicializar PCA con n_components
3:   Ajustar PCA a image_flat_normalized
4:   Transformar los datos a las componentes principales
5:   Graficar las componentes principales
6:   return componentes principales
7: end procedure
8: procedure COMPAREIMAGES(original_image, reconstructed_image)
9:   Crear subplots para comparar las dos imágenes
10:  Mostrar original_image y reconstructed_image en subplots
11: end procedure
12: Preprocesar imagen para PCA
13: Aplicar PCA y obtener componentes principales
14: Reconstruir la imagen desde las componentes principales
15: Comparar imagen original con imagen reconstruida
```

---

En la Fig. 3.6 se compara la imagen original con la reconstrucción a partir de las componentes principales. La imagen reconstruida con PCA muestra una versión simplificada. Esto resulta en una pérdida de detalles y una alteración del color y la calidad visual, pero la forma general de la canoa y el patrón de la superficie del agua siguen siendo reconocibles. Con esta reconstrucción se puede comprender qué parte de la varianza de los datos originales es capturada por los componentes principales.

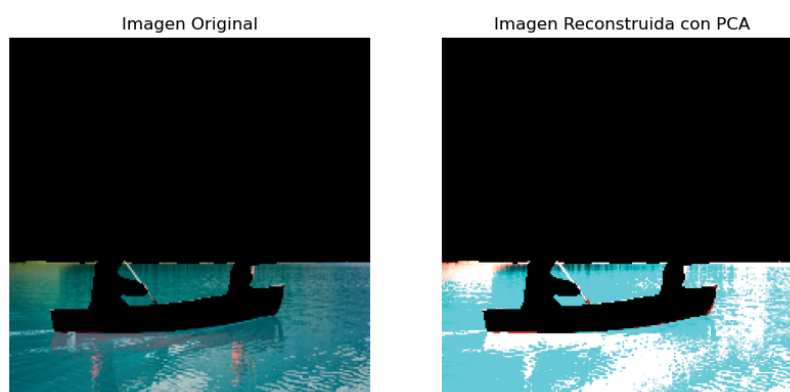


Figura 3.6: Comparativa imagen principal e imagen reconstruida.

### 3.1.2. Inicialización modelo segmentación UNet++

Una vez desarrolladas las herramientas de análisis que se consideran que pueden ser de utilidad para estudiar la detección de colonias de cianobacterias, se pone en marcha el modelo de segmentación basado en arquitectura UNet++. Tras la carga de bibliotecas y la instalación de la librería 'keras-unet-collection' se establecen el tamaño de lote de imágenes que el modelo procesará a la vez, el número de clases de segmentación y el número de imágenes para los conjuntos de entrenamiento y prueba.

A continuación se generan y se preparan los datos. Se definen las funciones '*input\_data\_process*' y '*target\_data\_process*', que normalizan los valores de los píxeles en un rango de 0 a 1 y convierte las máscaras en categorías. Se aplican estas funciones para la carga y procesamiento de los datos de prueba y de entrenamiento, indicando el directorio donde se encuentran estos conjuntos de datos.

Tras esto, se realiza la evaluación del modelo sin cuantizar. Se define la función '*infer*' que toma una imagen de entrada, realizando inferencia con el modelo y convirtiendo las salidas del modelo en un tensor de etiquetas de clase por píxel. Se carga el modelo mediante paquete 'keras' y se imprimen las métricas *IoU* para el agua y para la cianobacterias. Se realiza esto tanto para el conjunto de datos de pruebas como de entrenamiento y se obtienen los resultados de la tabla 3.3, los cuales indican que el modelo es bastante preciso en la detección de cianobacterias y agua en las imágenes.

	<b>Agua</b>	<b>Cyano</b>
<b>Data test</b>	0.807	0.937
<b>Data train</b>	0.834	0.938

Cuadro 3.3: Resultados métricas *IoU*.

En el siguiente paso se desarrollan las líneas de código para la visualización de las imágenes y de las máscaras. En primer lugar se utilizan en un primer caso las imágenes de prueba para generar predicciones y posteriormente se convierten las máscaras de segmentación, que están en formato de índices de clase, en imágenes RGB utilizando una paleta de colores. A continuación, se implementan las líneas de código desarrolladas en 3.1.1. Al igual que en el anterior modelo, se presenta en un subplot la imagen, con su predicción y la máscara verdadera, como se muestra en la Fig. 3.7

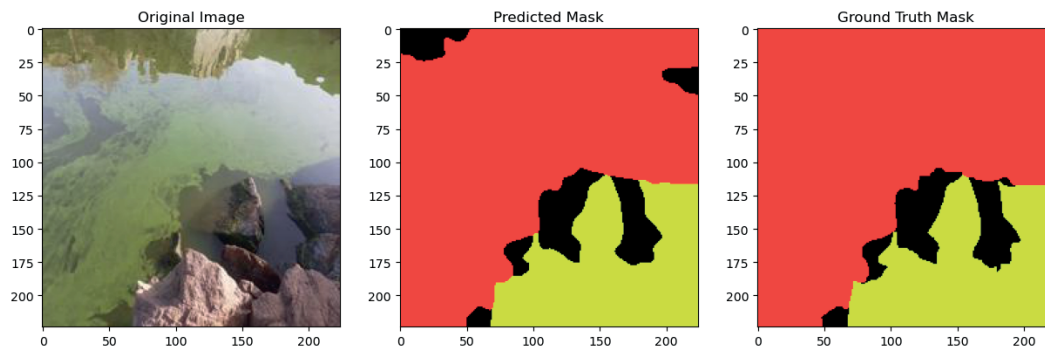


Figura 3.7: Resultado gráfico de la inicialización del segundo modelo.

Usando las líneas de códigos desarrolladas en el anterior modelo para realizar una máscara, para que, esta vez, obtener una imagen que contenga solo cianobacterias para su posterior procesamiento, como se observa en la Fig. 3.8.

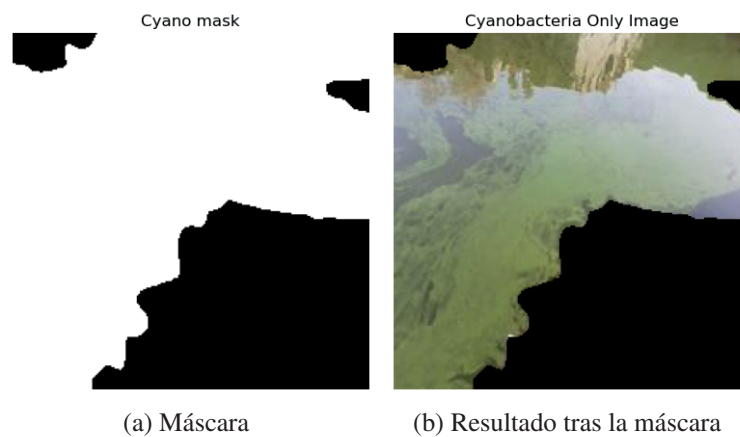


Figura 3.8: Comparativa máscara e imagen con máscara del segundo modelo.

Con el resultado de la Fig. 3.8b se tiene la base para la implementación de las herramientas de análisis desarrolladas anteriormente y se da por finalizada la puesta en marcha del modelo de segmentación basado en arquitectura UNet++. Se realizan los ensayos que continúan en las siguientes subsecciones.

### 3.1.3. Ensayo 1. Estudio sobre colonia de cianobacteria

Se implementan los algoritmos de los pseudocódigos 3.1, 3.2 y 3.3 modificando simplemente las variables usadas. Se plotea los canales RGB de la imagen tras la aplicación de la máscara sobre la imagen original, en este caso para la imagen de la Fig. 3.8b y se obtiene los resultados de la Fig. 3.13.

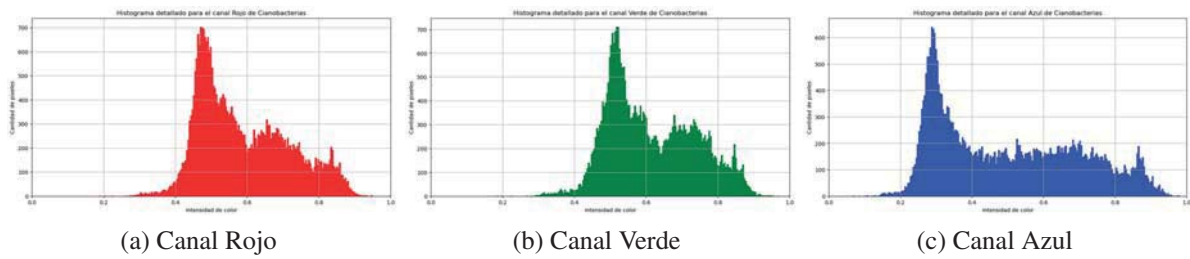


Figura 3.9: Resultado de la implementación del algoritmo 3.1 sobre imágenes con cianobacterias.

Se visualiza el espectro de magnitud de la TF2D en la Fig. 3.10.

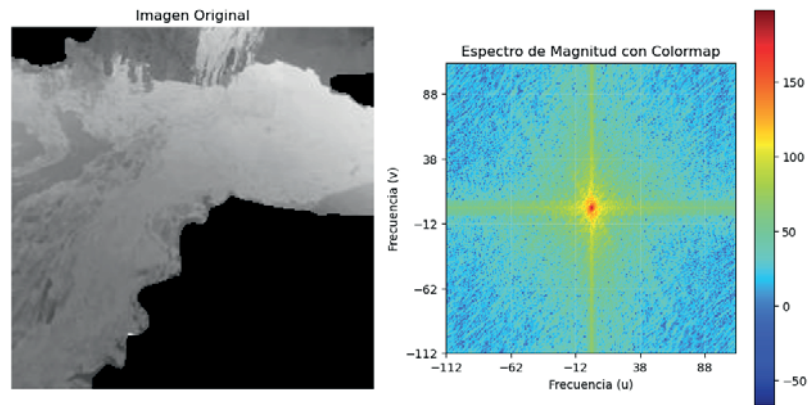


Figura 3.10: Comparación imagen con cianobacterias en escala de grises con espectro.

Y por último se implementa el algoritmo para el análisis de componentes principales y para la reconstrucción de la imagen con las componentes principales como se muestran en las Fig. 3.11 y 3.12.

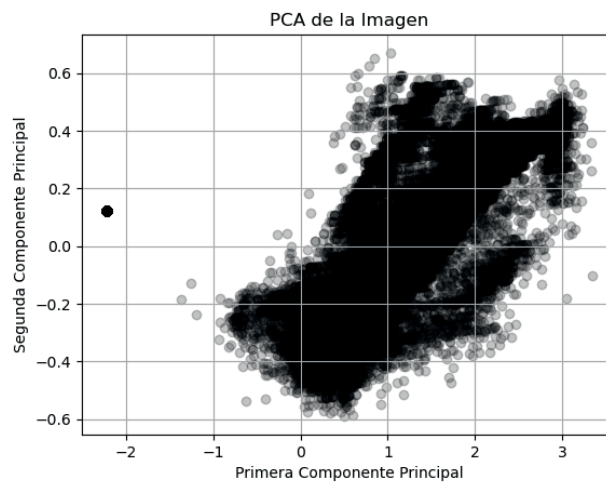


Figura 3.11: Análisis de componente principales para imagen con cianobacteria.

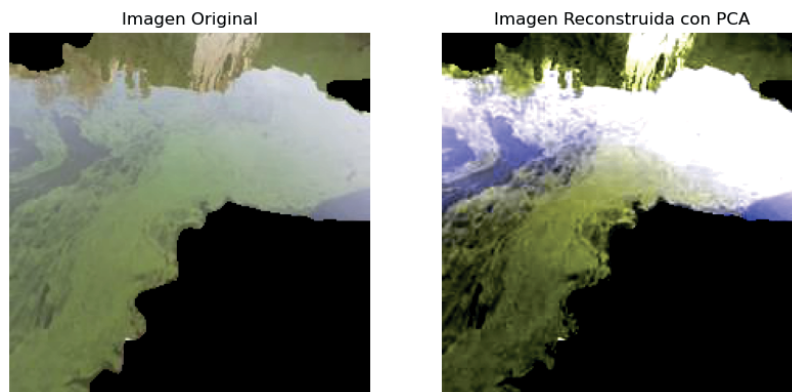


Figura 3.12: Comparativa imagen principal e imagen reconstruida para imagen con cianobacteria.

El análisis pormenorizado de varias imágenes utilizando estas herramientas se realizan en la sección 3.2.

### 3.1.4. Ensayo 2. Estudio HSV

En este ensayo se decide estudiar los canales HSV por el aspecto verdoso e intenso que tienen las cianobacterias. Para ello se decide plotear los canales HSV en histogramas, realizando alguna modificación sobre el algoritmo 3.1, teniendo como resultado el algoritmo mostrado en el pseudocódigo 3.4. Se convierte la imagen de RGB a HSV utilizando la biblioteca 'OpenCv'. Se descarta el canal 'value' y se analizan los canales 'hue' y 'saturation'.

---

#### Algorithm 3.4 Histogramas canales HSV

---

- 1: Convertir la imagen 'ciano\_only\_image' de RGB a HSV
  - 2: Separar los canales HSV en hue\_channel, sat\_channel, val\_channel
  - 3: **procedure** PLOT\_HISTOGRAM\_HSV(channel, title, channel\_name, num\_bins)
  - 4:     Filtrar los valores del canal mayores a 0
  - 5:     **if** channel está vacío **then**
  - 6:         Mostrar mensaje de error
  - 7:         **return**
  - 8:     **end if**
  - 9:     Calcular histograma del canal
  - 10:     Configurar gráfica del histograma
  - 11:     Dibujar histograma con configuraciones de color y estilo
  - 12:     Mostrar histograma
  - 13: **end procedure**
  - 14: Generar y mostrar histograma para hue\_channel con 180 bins
  - 15: Generar y mostrar histograma para sat\_channel
  - 16: Generar y mostrar histograma para val\_channel
-



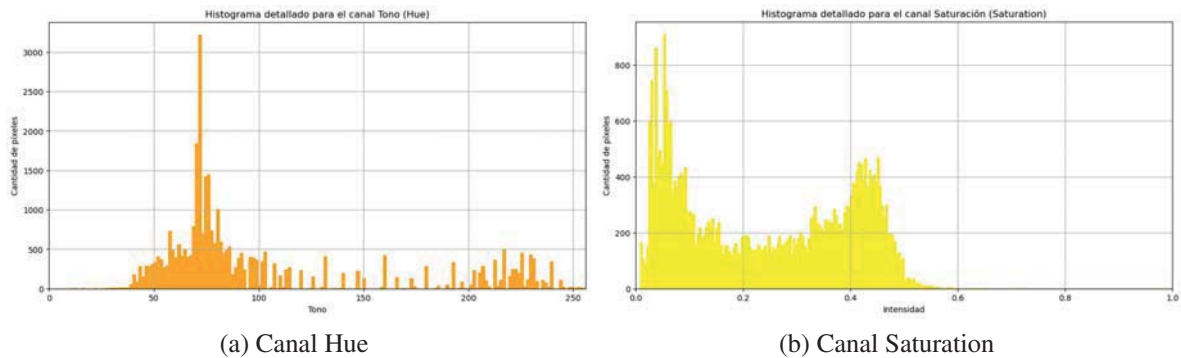


Figura 3.13: Resultado de la implementación del algoritmo 3.4 sobre imágenes con cianobacterias.

En la Fig. 3.13 se muestran los resultados del histograma de los canales de saturación y matiz de la Fig. 3.8b. En la sección 3.2 se analizarán los resultados de varias imágenes en busca de un patrón.

### 3.1.5. Ensayo 3. Estudio agua-cianobacteria

El último ensayo que se realiza es el estudio de los histogramas en imágenes donde existan zonas claramente diferenciadas entre cianobacterias y agua, para tener una idea de los colores que predominan en ese cuerpo de agua e intentar detectar las cianobacterias por la diferencia de histogramas. Para ello se detectan que las imágenes con las zonas más diferenciadas y sobre las que se puede realizar un mejor análisis se encuentran en el datatrain, en vez de en el dataset. Se realizan simples modificaciones para que se procesen las imágenes de este dataset y sus anotaciones, pero esto conlleva un tiempo de computación mayor, al ser un conjunto de datos mayor que el dataset de prueba. En la Fig. 3.14 se muestran los resultados de la imagen seleccionada.

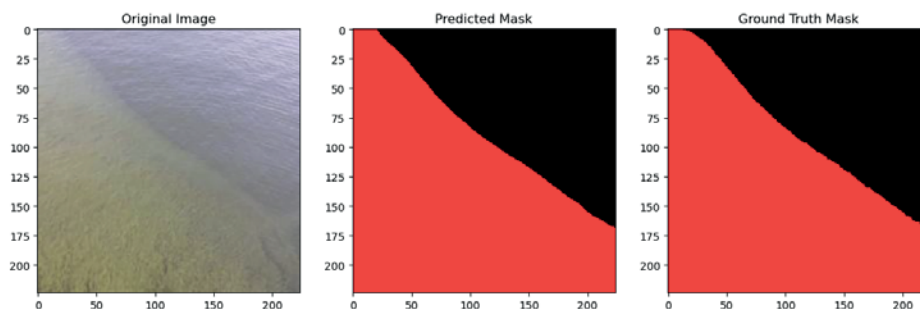


Figura 3.14: Resultado gráfico de la inicialización del segundo modelo para imágenes con zonas de agua y cianobacterias bien diferenciadas.

Ahora al igual que en ensayos previos se le aplica la máscara sobre la imagen original, pero en este caso serán dos, una para obtener solo agua, y otra para obtener solo cianobacteria. Los resultados de este proceso se ilustra en la Fig. 3.15.

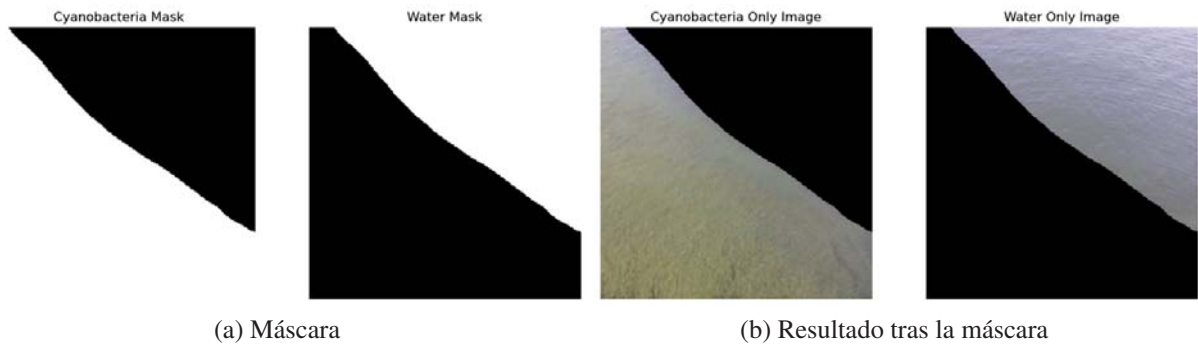


Figura 3.15: Comparativa máscara e imagen con máscara sobre cianobacteria y sobre agua.

A continuación se modifica el algoritmo 3.1 de modo que genere un 'subplot' comparando cada canal RGB entre cianobacteria y agua. La modificación simplemente es que recorra un bucle 'for' para cada color.

---

**Algorithm 3.5** Algoritmo 3.1 modificado

---

```

1: Entrada: ciano_only_image, water_only_image, title_suffix
2: procedure PLOTHISTOGRAM(channel_data, title, subplot_position)
3:   Calcula histograma y bin_edges de channel_data
4:   Configura subplot en subplot_position
5:   Dibuja el histograma con plt.bar
6:   Configura título, etiquetas, límites y grid
7: end procedure
8: if np.max(ciano_only_image) > 1 then
9:   Normaliza ciano_only_image
10: end if
11: if np.max(water_only_image) > 1 then
12:   Normaliza water_only_image
13: end if
14: Define colors como ['red', 'green', 'blue']
15: for cada color en colors do
16:   Extrae y aplana canales de ciano_only_image y water_only_image
17:   Filtra valores mayores a 0
18:   Crea una nueva figura con plt.figure
19:   Llama a PlotHistogram para cianobacterias y agua
20:   Muestra la figura con plt.tight_layout y plt.show
21: end for

```

---

Con este algoritmo desarrollado se realiza las diferencias entre ambas y se grafiquen. De este modo se eliminaría la componente sistematica predominante en el lago de estudio. El análisis de

los resultados se realiza en la sección 3.2

### 3.2. Análisis de los resultados

#### 3.2.1. Ensayo 1. Estudio sobre colonia de cianobacteria

Se analizan varias muestras de imágenes ya segmentadas habiendo sido aplicada la máscara para tener una imagen con solo cianobacteria.

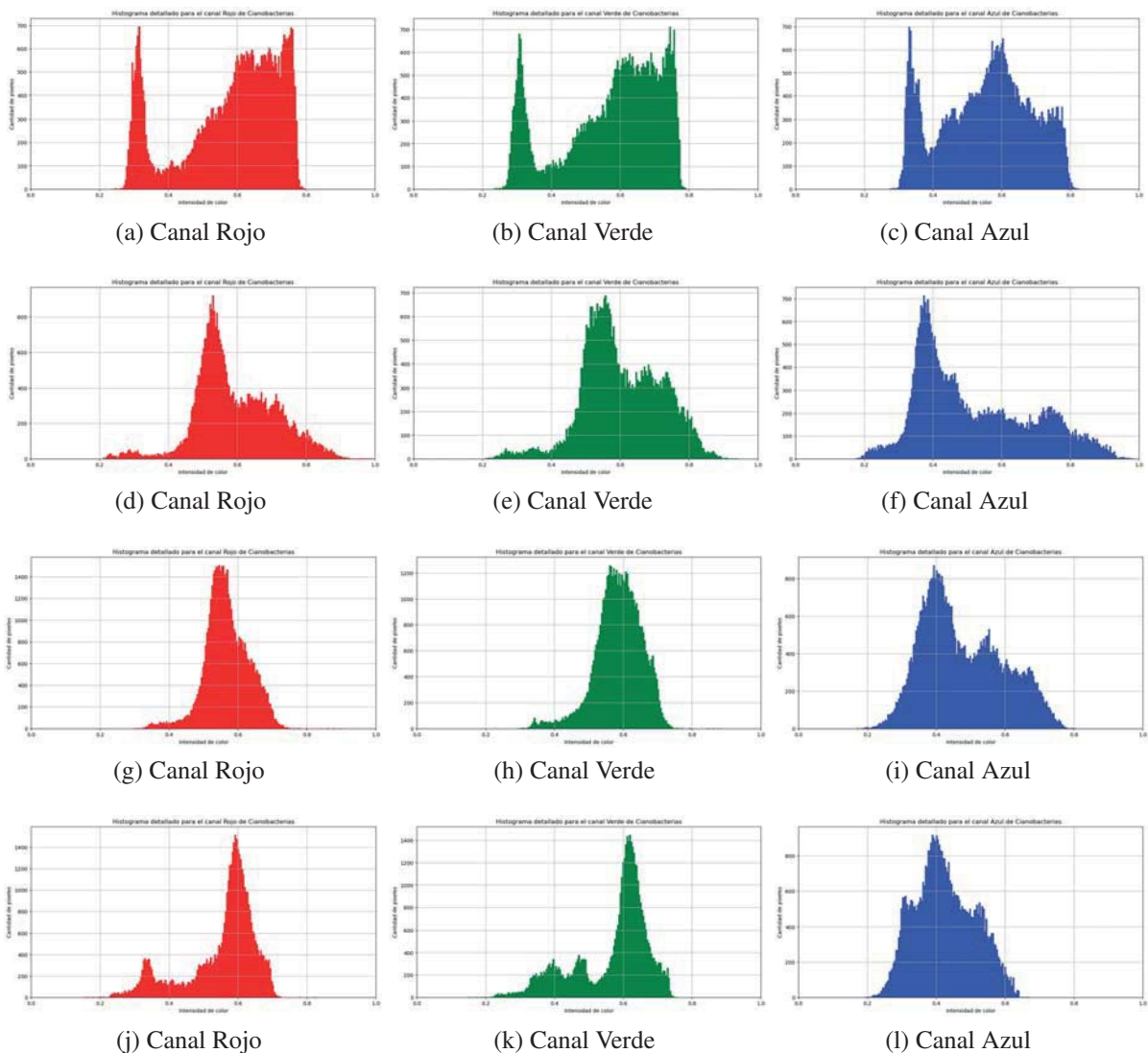


Figura 3.16: Comparativa histogramas RGB sobre imágenes con cianobacterias.

Como se observa en la Fig. 3.16 la distribución de los píxeles e intensidades no siguen un patrón claro. Se decide extraer de una muestra de 10 imágenes del lote previamente fijado en 76 imágenes, y se extrae del histograma la moda para cada canal, por ser el número que se presenta con más

frecuencia en un conjunto de datos y el que podría ser indicativo de la presencia de cianobacterias. La distribución de estos puntos para cada canal se muestra en la Fig. 3.17.

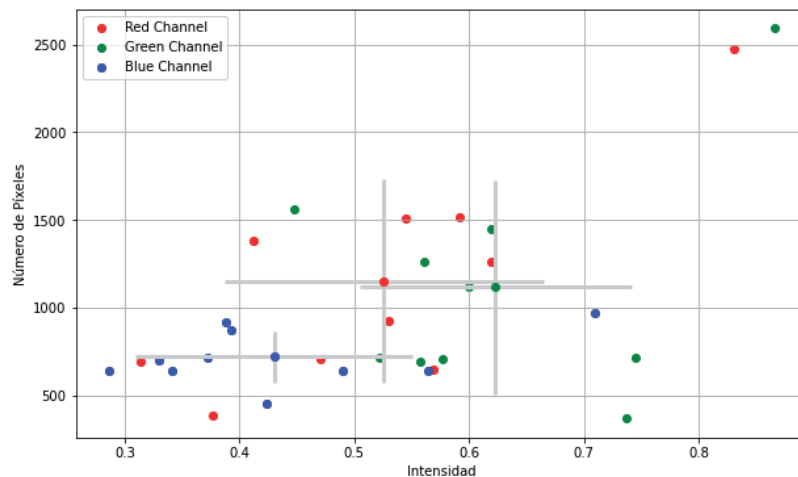


Figura 3.17: Gráfica de la moda para cada canal RGB.

En la gráfica se muestra también la media de estos datos y sus respectivas desviaciones estándar mediante barras de error. Se considera que los datos no son concluyentes ya que hay una gran dispersión en los canales rojo y verde. La dispersión alta indica una variabilidad significativa en la intensidad de color y en el número de píxeles de la moda entre las imágenes. Esto podría sugerir que hay una diversidad en la forma en que las cianobacterias se presentan en diferentes cuerpos de agua o bajo diferentes condiciones de iluminación y captura de imagen. Se observa una buena dispersión de datos en el número de píxeles para el canal azul con valor promedio de 719 píxeles y una desviación de  $\pm 148.7$ .

Se analiza ahora los espectros de magnitud. En la Fig. 3.18 se muestran algunos ejemplos. El punto central brillante en cada espectro sugiere que las cianobacterias generan una cantidad significativa de baja frecuencia en la imagen, posiblemente debido a su masa o a la uniformidad en su distribución. Las líneas cruzadas brillantes podrían ser indicativas de estructuras o patrones que se repiten en la imagen, lo cual es una característica notable que podría estar relacionada con la forma en que las cianobacterias se agrupan o distribuyen en la superficie del agua.

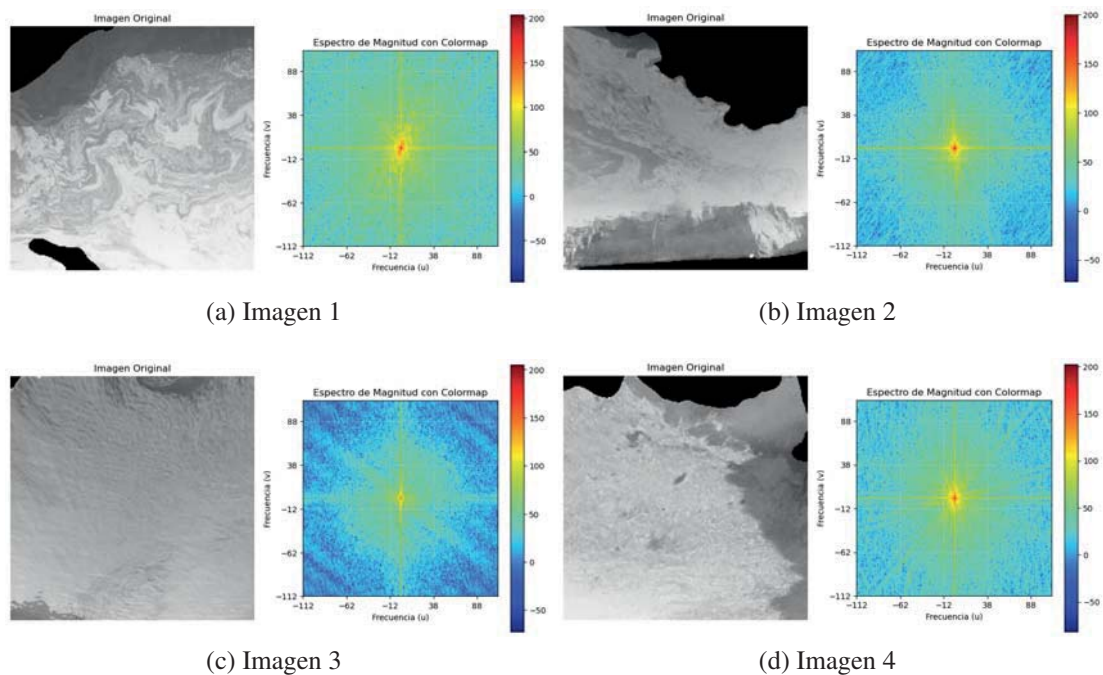


Figura 3.18: Comparativa de TF2D sobre imágenes con cianobacterias.

Por último se realiza un análisis de componentes principales. Tras un análisis detallado de los resultados de esta herramienta (véase Fig. 3.19), se llega a la conclusión de que no revela mucha información sobre la presencia de cianobacterias, ya que simplemente muestra las direcciones de máxima varianza, que pueden o no estar relacionadas con las cianobacterias y además, no tiene en cuenta la información espacial entre los píxeles, lo cual es puede ser crucial, ya que las cianobacterias pueden formar patrones o estructuras que requieren análisis espacial.

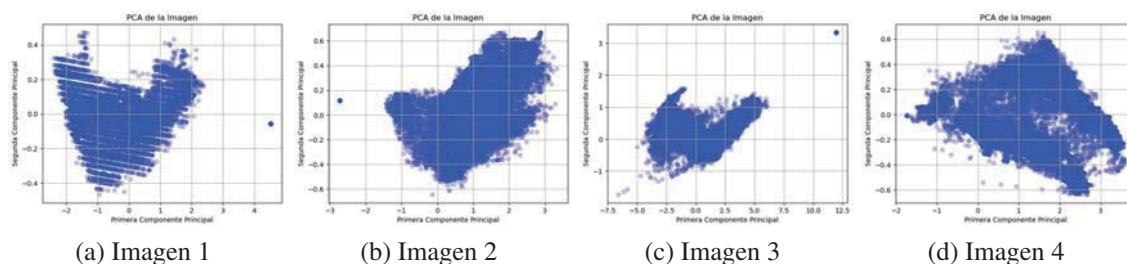


Figura 3.19: Comparativa de PCA sobre imágenes con cianobacterias.

### 3.2.2. Ensayo 2. Estudio HSV

Tras unos resultados no muy concluyentes en el Ensayo 1, se decide analizar los canales saturación y *hue* (tono o matiz), debido al aspecto verde intenso de la cianobacteria. Como se observa en la Fig. 3.20, estos resultados ya muestran más similitud entre diferentes imágenes con cianobacteria.

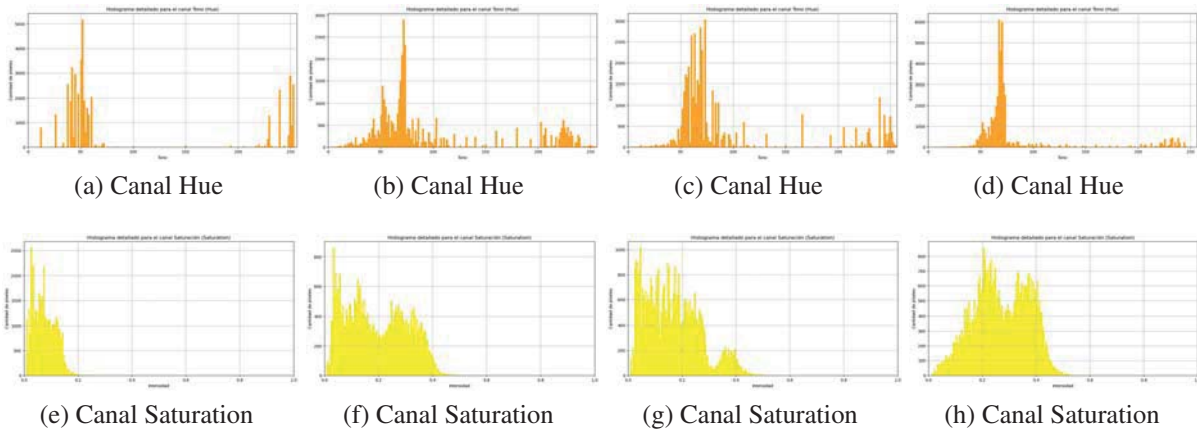


Figura 3.20: Comparativa histogramas HSV sobre imágenes con cianobacterias.

En el canal de saturación apreciamos una distribución semejante para distintas imágenes. Aun así, los niveles de saturación son bastante bajos a lo esperado. Esto puede ser debido a las condiciones ambientales y de iluminación bajo las que se tomaron la fotografía. Ante esto, se buscan en el data-set imágenes donde a primera vista se observe una saturación alta en las zonas con cianobacterias.

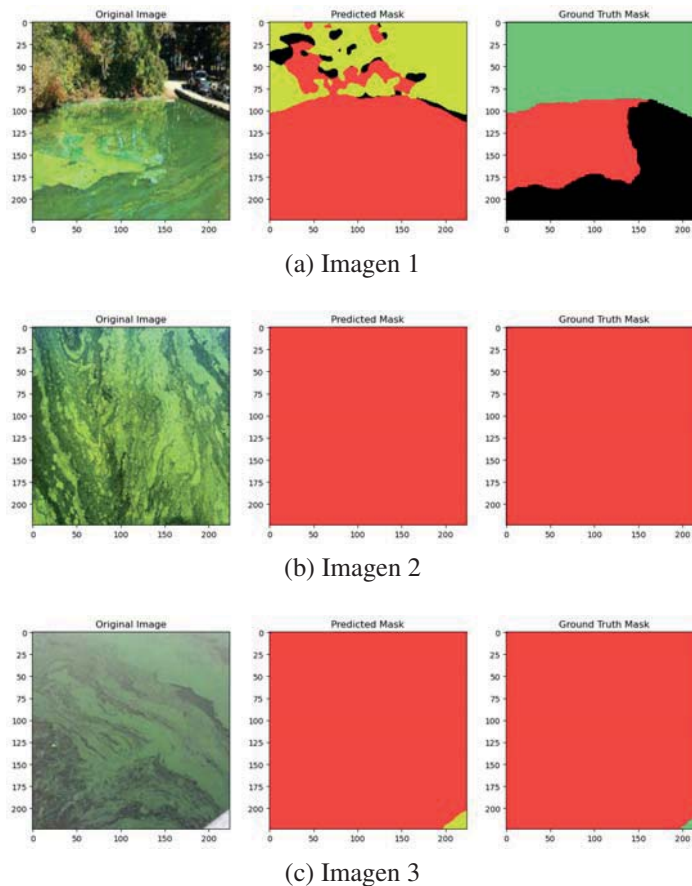


Figura 3.21: Mala segmentación del modelo.

En la Fig. 3.21, se muestra los resultados a la hora de segmentar las imágenes donde se aprecia una alta saturación de las zonas de agua contaminadas. Se observa que sobre las imágenes no realiza una buena segmentación, por lo que esta vía de estudio queda descartada.

### 3.2.3. Ensayo 3. Estudio agua-cianobacteria

Se realiza un análisis cuantitativo de los histogramas y se comparan con imágenes control de agua sin cianobacterias. Se tiene en cuenta que se deben seleccionar imágenes de un mismo lago y en las mismas condiciones de luz y exposición al ser tomada la fotografía. Para ilustrar el proceso y resultado de este estudio se selecciona la imagen de la Fig. 3.22.



Figura 3.22: Imagen con partes de cianobacteria y agua bien diferenciadas.

Sobre la imagen anterior se aplica el algoritmo mostrado en el pseudocódigo 3.5, para iterar dos veces los histogramas, uno sobre cada máscara (agua y cianobacteria) y presentar los histogramas de cada canal RGB por separado. Al hacer las diferencias entre ambas, se considera que se ha sustraído la componente sistemática relativa al cuerpo de agua bajo estudio. Los resultados se muestran en la Fig. 3.23.

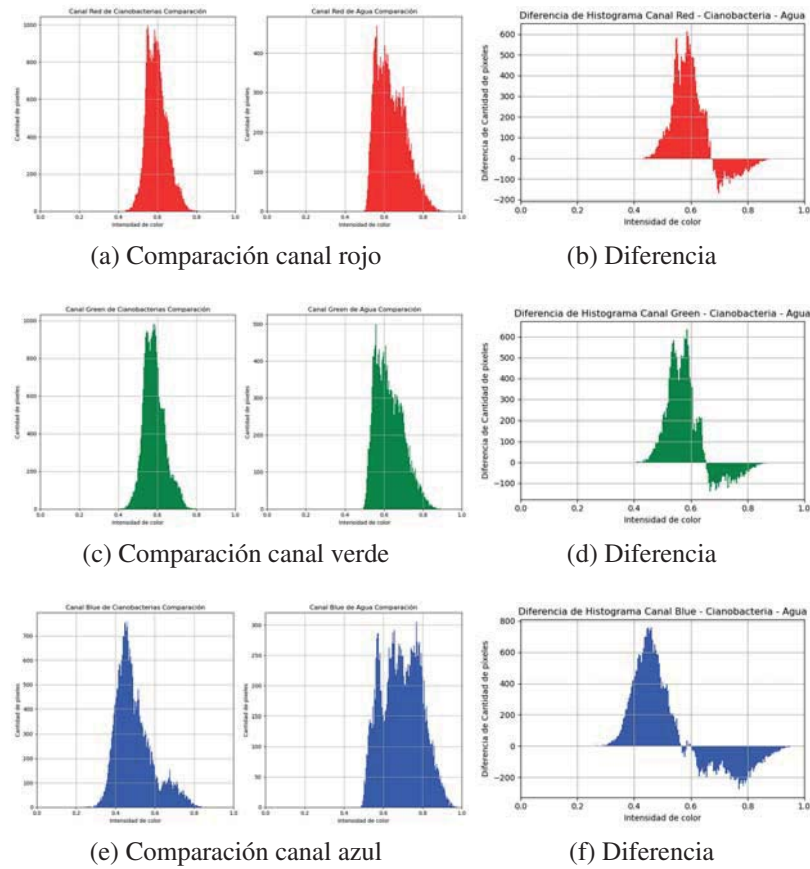


Figura 3.23: Comparativa histogramas RGB imagen segmentada agua y cianobacterias y su diferencia.

Bajo esta premisa se seleccionan varias imágenes del mismo cuerpo de agua en la que el modelo realice una buena segmentación de las clases agua y cianobacterias. Se decide graficar la moda de cada canal de los histogramas 'diferencia', por ser el valor de más frecuencia, es decir, estamos representando los picos más altos de los histogramas, y tras haber eliminado los *outliers* con un filtro  $3\sigma$ , se observa una mejor dispersión de los valores (véase Fig. 3.24).

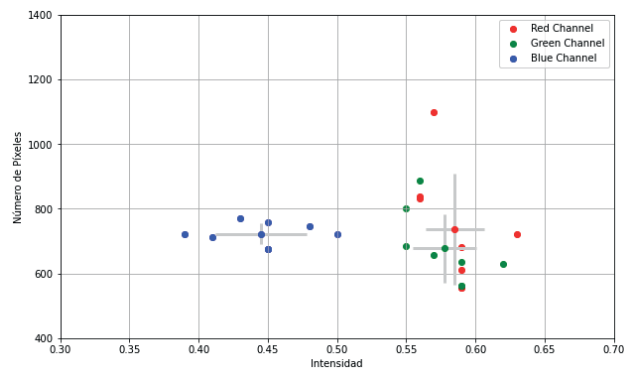


Figura 3.24: Gráfica de la moda para cada canal RGB.



De la gráfica anterior se deben resaltar varios aspectos. El primero de ellos es que se cumple la hipótesis formulada en 2.2: "La presencia de cianobacterias en cuerpos de agua afecta significativamente la distribución e intensidad de los píxeles en los canales verde y azul del espectro RGB, y del canal saturación del espectro HSV de las imágenes acuáticas". Esta hipótesis se basaba en la presencia de ficocianina, un pigmento característico de las cianobacterias. Se obtiene como se esperaba valores altos en el canal verde y bajos en el canal azul, por lo que se infiere que absorbe más en el rango azul del espectro. A primera vista resultaría llamativo los valores altos en el canal rojo, por lo que se concluye que este pigmento refleja el color rojo. Tras una revisión al libro de referencia [35], se corrobora que este pigmento, dependiendo de su concentración, es capaz de reflejar luz en longitudes de onda próximas a 700 nm. En la tabla 3.4 se muestran los valores medios obtenidos de este análisis y sus desviaciones estándar.

	<b>Canal Rojo</b>		<b>Canal Verde</b>		<b>Canal Azul</b>	
	Media	Desv. estándar	Media	Desv. estándar	Media	Desv. estándar
<b>Nº píxeles</b>	736.375	± 171.63	677.875	± 106.163	722.125	± 32.335
<b>Intensidad</b>	0.585	± 0.021	0.578	± 0.023	0.445	± 0.033

Cuadro 3.4: Valores medios y desviaciones.

## 4. Conclusiones

El presente estudio ha subrayado la crucial importancia de monitorizar y concienciar acerca de la proliferación de cianobacterias, un fenómeno que reviste de gran interés no solo desde el punto de vista ecológico sino también de salud pública. Para ello el foco de este trabajo ha sido el desarrollo de herramientas para una detección temprana de las colonias de cianobacterias en cuerpos acuáticos sobre imágenes previamente segmentadas por modelos de segmentación.

Los resultados obtenidos corroboran la hipótesis inicial: la ficocianina, un pigmento presente en las cianobacterias, refleja con mayor intensidad en los canales verde y rojo, lo que se traduce en valores altos en los histogramas correspondientes. Contrariamente, absorbe la luz azul, resultando en valores menores en el canal azul. Esta característica espectral distinta hace que el análisis de los canales RGB sea una herramienta valiosa para la detección de cianobacterias, siempre y cuando se realice una adecuada sustracción de los valores correspondientes al agua predominante en el entorno específico de estudio.

Por otro lado, se ha determinado que el análisis de componentes principales (PCA) no es tan eficaz para la identificación de cianobacterias. Esto se debe a que el PCA se centra en identificar las direcciones de máxima varianza sin considerar la discriminación específica de colores necesaria para identificar estos organismos. Además, el espectro de magnitud reveló una preponderancia de bajas frecuencias en la imagen, sugiriendo una masa o distribución uniforme de las cianobacterias, mientras que las líneas cruzadas brillantes podrían ser indicativas de estructuras o patrones repetitivos en la imagen.

Otro factor crítico que surgió del estudio es que la saturación de la imagen puede variar significativamente dependiendo de la calidad de la imagen y las condiciones ambientales bajo las cuales se tomó la fotografía, lo que afecta la precisión en la identificación de las cianobacterias. Además durante esta vía de ensayo se evidenció algunos errores de segmentación notorios en ciertas muestras de imágenes.

Para trabajos futuros, se propone explorar el uso de cámaras hiperespectrales. Las imágenes hiperespectrales se caracterizan por capturar información a lo largo de cientos de bandas espectrales para cada píxel de la imagen. A diferencia de las imágenes RGB tradicionales, que solo capturan tres canales (RGB), las imágenes hiperespectrales ofrecen una representación mucho más detallada y precisa del espectro electromagnético. Este tipo de imágenes permite identificar y diferenciar materiales y elementos con una precisión mucho mayor, lo cual es crucial para la detección de cianobacterias, dadas sus propiedades espectrales. Sin embargo, el procesamiento de este tipo de imágenes será más complejo debido a la gran cantidad de datos y la necesidad de algoritmos especializados para analizar eficientemente la información espectral.

Además se considera conveniente continuar con el desarrollo y entrenamiento de modelos de segmentación semántica para mejorar la detección y el análisis de cianobacterias, así como tratar de segmentar las zonas que contengan reflejos, por ser una fuente de ruido en las imágenes.. Esto implica no solo la mejora de los modelos usados en este estudio, U-Net++ o DeepLabV3+, sino también la exploración de nuevas arquitecturas y técnicas de aprendizaje profundo, como se ha comenzado a investigar en [17] y [16].

Estas líneas de investigación no solo contribuirán al campo del análisis de imágenes en contextos ecológicos y ambientales, sino que también proporcionarán información valiosa para la toma de decisiones en la gestión y preservación de ecosistemas acuáticos. La integración de estas tecnologías avanzadas con estudios biológicos y ecológicos permitirá una comprensión más profunda y una respuesta más efectiva ante fenómenos como la proliferación de cianobacterias.

## Referencias

- [1] J. L. Graham, N. M. Dubrovsky, S. M. Eberts, Cyanobacterial harmful algal blooms and US Geological Survey science capabilities, US Department of the Interior, US Geological Survey, 2016.
- [2] Y. J. Cruz, M. Rivas, R. Quiza, A. Villalonga, R. E. Haber, G. Beruvides, Ensemble of convolutional neural networks based on an evolutionary algorithm applied to an industrial welding process, *Computers in Industry* 133 (2021) 103530.
- [3] X. Hou, L. Feng, Y. Dai, C. Hu, L. Gibson, J. Tang, Z. Lee, Y. Wang, X. Cai, J. Liu, et al., Global mapping reveals increase in lacustrine algal blooms over the past decade, *Nature Geoscience* 15 (2) (2022) 130–134.
- [4] W. W. Carmichael, G. L. Boyer, Health impacts from cyanobacteria harmful algae blooms: Implications for the north american great lakes, *Harmful algae* 54 (2016) 194–212.
- [5] W. W. Carmichael, Health effects of toxin-producing cyanobacteria: "the cyanohabs", *Human and ecological risk assessment* 7 (5) (2001) 1393–1407.
- [6] J. Veerman, A. Kumar, D. R. Mishra, Exceptional landscape-wide cyanobacteria bloom in okavango delta, botswana in 2020 coincided with a mass elephant die-off event, *Harmful algae* 111 (2022) 102145.
- [7] El País, Las autoridades de botsuana culpan a una cianobacteria de la muerte de 330 elefantes, *El País* (09 2020).  
URL [https://elpais.com/sociedad/mundo\\_animal/2020-09-22/las-autoridades-de-botsuana-culpan-a-una-cianobacteria-de-la-muerte-de-330-elefantes.html](https://elpais.com/sociedad/mundo_animal/2020-09-22/las-autoridades-de-botsuana-culpan-a-una-cianobacteria-de-la-muerte-de-330-elefantes.html)
- [8] C. R. Kouakou, T. G. Poder, Economic impact of harmful algal blooms on human health: a systematic review, *Journal of Water and Health* 17 (4) (2019) 499–516.
- [9] S. Hajdu, H. Högländer, U. Larsson, Phytoplankton vertical distributions and composition in baltic sea cyanobacterial blooms, *Harmful Algae* 6 (2) (2007) 189–205.
- [10] B. Karlson, L. Arneborg, J. Johansson, J. Linders, Y. Liu, M. Olofsson, A suggested climate service for cyanobacteria blooms in the baltic sea—comparing three monitoring methods, *Harmful Algae* 118 (2022) 102291.
- [11] S. Hao, Y. Zhou, Y. Guo, A brief survey on semantic segmentation with deep learning, *Neurocomputing* 406 (2020) 302–321.

- [12] S. Asgari Taghanaki, K. Abhishek, J. P. Cohen, J. Cohen-Adad, G. Hamarneh, Deep semantic segmentation of natural and medical images: a review, *Artificial Intelligence Review* 54 (2021) 137–178.
- [13] D. Mukherkjee, P. Saha, D. Kaplun, A. Sinitca, R. Sarkar, Brain tumor image generation using an aggregation of gan models with style transfer, *Scientific Reports* 12 (1) (2022) 9141.
- [14] Z. Zhou, M. M. Rahman Siddiquee, N. Tajbakhsh, J. Liang, Unet++: A nested u-net architecture for medical image segmentation, in: *Deep Learning in Medical Image Analysis and Multimodal Learning for Clinical Decision Support: 4th International Workshop, DLMIA 2018, and 8th International Workshop, ML-CDS 2018, Held in Conjunction with MICCAI 2018, Granada, Spain, September 20, 2018, Proceedings 4*, Springer, 2018, pp. 3–11.
- [15] Q. Ha, K. Watanabe, T. Karasawa, Y. Ushiku, T. Harada, Mfnet: Towards real-time semantic segmentation for autonomous vehicles with multi-spectral scenes, in: *2017 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, IEEE, 2017, pp. 5108–5115.
- [16] Z. Wang, C. Wang, Y. Liu, J. Wang, Y. Qiu, Real-time identification of cyanobacteria blooms in lakeshore zone using camera and semantic segmentation: A case study of lake chaohu (eastern china), *Sustainability* 15 (2) (2023) 1215.
- [17] F. Barrientos-Espillco, E. Gascó, C. I. López-González, M. J. Gómez-Silva, G. Pajares, Semantic segmentation based on deep learning for the detection of cyanobacterial harmful algal blooms (cyanohabs) using synthetic images, *Applied Soft Computing* (2023) 110315.
- [18] Y. P. Ronquillo Cajamarca, Segmentación semántica en entornos de edge computing para la detección de colonias de cianobacterias, Master’s thesis, Universidad Complutense de Madrid, Facultad de Informática, trabajo Fin de Máster (2023).
- [19] IBM, Deep learning, <https://www.ibm.com/es-es/topics/machine-learning>, accedido: 26-01-2024 (2024).
- [20] IBM, Deep learning, <https://www.ibm.com/es-es/topics/semantic-segmentation>, accedido: 26-01-2024 (2024).
- [21] Darwin - image annotation platform, <https://darwin.v7labs.com/>, accedido: 26-01-2024 (2024).
- [22] N. Developers, Numpy: The fundamental package for scientific computing with python, accedido: 20-12-2023 (2023).  
URL <https://numpy.org/>

- [23] M. Developers, Matplotlib: Visualization with python, accedido: 20-12-2023 (2023).  
URL <https://matplotlib.org/>
- [24] O. Team, Open source computer vision library, accedido: 20-12-2023 (2023).  
URL <https://opencv.org/>
- [25] scikit-image Developers, scikit-image: Image processing in python, accedido: 20-12-2023 (2023).  
URL <https://scikit-image.org/>
- [26] T. Team, Tensorflow: An end-to-end open source machine learning platform, accedido: 20-12-2023 (2023).  
URL <https://www.tensorflow.org/>
- [27] F. Chollet, et al., Keras: The python deep learning api, <https://keras.io/>, accedido: 2024-01-18.
- [28] os - miscellaneous operating system interfaces, <https://docs.python.org/3/library/os.html>, accedido: 2024-01-18.
- [29] S. Developers, Seaborn: Statistical data visualization, accedido: 20-12-2023 (2023).  
URL <https://seaborn.pydata.org/>
- [30] Protocol buffers - google's data interchange format, <https://developers.google.com/protocol-buffers>, accedido: 2024-01-18.
- [31] glob - unix style pathname pattern expansion, <https://docs.python.org/3/library/glob.html>, accedido: 2024-01-18.
- [32] scipy.io - scipy input and output, <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/io.html>, accedido: 2024-01-18.
- [33] PIL - python imaging library, <https://python-pillow.org/>, accedido: 2024-01-18.
- [34] Deep learning specialization, <https://www.coursera.org/specializations/deep-learning>, coursera (2024).
- [35] I. Chorus, M. Welker, Toxic cyanobacteria in water: a guide to their public health consequences, monitoring and management, Taylor & Francis, 2021.



SUBSECRETARÍA DE DEFENSA  
SECRETARÍA GENERAL TÉCNICA  
SUBDIRECCIÓN GENERAL  
DE PUBLICACIONES  
Y PATRIMONIO CULTURAL

