REAL INSTITUTO Y OBSERVATORIO DE LA ARMADA EN SAN FERNANDO
BOLETÍN ROA N.º 2/2021

TRABAJOS FIN DE MÁSTER 2020 DE LOS ALUMNOS DE LA ESCUELA DE ESTUDIOS SUPERIORES DE LA ARMADA

MINISTERIO DE DEFENSA

REAL INSTITUTO Y OBSERVATORIO DE LA ARMADA EN SAN FERNANDO

BOLETÍN ROA Nº 2/2021

TRABAJOS FIN DE MÁSTER 2020 DE LOS ALUMNOS DE LA ESCUELA DE ESTUDIOS SUPERIORES DE LA ARMADA

MINISTERIO
DE DEFENSA

Catálogo de Publicaciones de Defensa
https://publicaciones.defensa.gob.es

Catálogo de Publicaciones de la Administración General del Estado
https://cpage.mpr.gob.es

publicaciones.defensa.gob.es
cpage.mpr.gob.es

Edita:

MINISTERIO DE DEFENSA
SUBSECRETARÍA DE DEFENSA
SECRETARÍA GENERAL TÉCNICA

Paseo de la Castellana 109, 28046 Madrid

© Autor y editor, 2021

NIPO 083-21-201-X (impresión bajo demanda)
Colección: ROA, ISSN 1131-5040

NIPO 083-21-202-5 (edición en línea)

Fecha de edición: diciembre de 2021
Maqueta e imprime: Imprenta Ministerio de Defensa

Las opiniones emitidas en esta publicación son exclusiva responsabilidad del autor de la misma.
Los derechos de explotación de esta obra están amparados por la Ley de Propiedad Intelectual. Ninguna de las partes de la misma puede ser reproducida, almacenada ni transmitida en ninguna forma ni por medio alguno, electrónico, mecánico o de grabación, incluido fotocopias, o por cualquier otra forma, sin permiso previo, expreso y por escrito de los titulares del copyright ©.

En esta edición se ha utilizado papel 100% libre de cloro procedente de bosques gestionados de forma sostenible.

Foto portada:

Fachada del Edificio Principal del Real Instituto y Observatorio de la Armada en San Fernando (siglo XVIII).

1. **ESTUDIO DEL ERROR EN EL CÁLCULO DE LA POSICIÓN DEBIDO A LAS IRREGULARIDADES DEL CAMPO GRAVITATORIO TERRESTRE Y A PERTURBACIONES ATMOSFÉRICAS……. 5**
Teniente de Navío Víctor de Ory Guimerá

2. **FLEXIÓN DE LA LITOSFERA PRODUCIDA POR ELEMENTOS GEOLÓGICOS AISLADOS SITUADOS EN DISTINTOS AMBIENTES TECTÓNICOS. 97**
Teniente de Navío Julián Fiz Barrena

MÁSTER UNIVERSITARIO
EN CIENCIA Y TECNOLOGÍA ESPACIAL

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

TRABAJO FIN DE MÁSTER

ESTUDIO DEL ERROR EN EL CÁLCULO DE LA POSICIÓN POR MÉTODOS ASTRONÓMICOS DEBIDO A LAS IRREGULARIDADES DEL CAMPO GRAVITATORIO TERRESTRE Y A PERTURBACIONES ATMOSFÉRICAS

D. Víctor de Ory Guimerá

Resumen

En el Real Instituto y Observatorio de la Armada estamos actualmente trabajando en un proyecto de investigación sobre navegación astronómica de alta precisión, que permita obtener la posición del observador en la superficie terrestre con el menor error posible, partiendo de los datos astrométricos obtenidos de una serie de astrofotografías capturadas con una cámara cenital perfectamente alineada con el vector de gravedad local.

Este TFM se encuadraría dentro de la primera fase de dicho proyecto (análisis teórico del problema), planteándose en particular la realización de un estudio del error sistemático existente entre las posiciones de astros en fotografías cenitales y las posiciones que aparecerían en ausencia tanto de atmósfera como de anomalías gravitatorias en la superficie de la Tierra.

Partimos del supuesto de que disponemos de imágenes del firmamento nocturno obtenidas con una cámara astrofotográfica de apuntamiento cenital perfecto. En este caso sería posible identificar la localización del cénit del observador en el sistema de coordenadas ecuatoriales celestes (ascensión recta y declinación) de las imágenes analizadas. Debemos resaltar que las características de la cámara y de la propia imagen nos resultan irrelevantes en el contexto de este TFM; supondremos una reducción astrométrica carente de error.

En última instancia, deseamos obtener las coordenadas geográficas del observador (longitud y latitud) a partir de las coordenadas ecuatoriales celestes de su cénit aparente, descrito anteriormente. Si la Tierra fuese un elipsoide perfecto, completamente homogéneo y carente de atmósfera, la transformación de dichas coordenadas ecuatoriales celestes a geográficas sería trivial. Pero dado que no es el caso, es un objetivo del TFM el realizar el estudio de la conversión de dichas coordenadas ecuatoriales aplicando los mejores modelos disponibles del geoide, que describen las anomalías gravitatorias en los diferentes puntos de la superficie terrestre, así como los efectos de las mareas oceánicas y la refracción óptica debida a efectos atmosféricos.

El estudio lo dividimos en dos partes bien diferenciadas:

1. Análisis del error de posicionamiento debido a la desviación de la horizontal local por las irregularidades del campo gravitatorio terrestre y efecto de las mareas, especialmente sobre las masas oceánicas.

2. Caracterización de la desviación óptica del cénit debido a diferentes perturbaciones en las condiciones atmosféricas.

Este trabajo es de naturaleza esencialmente teórica, centrándonos principalmente en el estudio de la bibliografía y en la realización de diferentes simulaciones informáticas, y se relaciona con la observación astronómica, las irregularidades gravitatorias, las mareas oceánicas y algunos efectos atmosféricos.

Contenido

1.1 Tabla de figuras 11
1.2 Índice de tablas. 14
2 Introducción. 15
2.1 Contexto del Trabajo en el marco del Máster Ciencia y Tecnología Espacial. 16
3 Metodología. 17
3.1 Contexto de la investigación. 17
3.2 Problema central del TFM. 17
3.2.1 Descripción general. 17
3.3 Preguntas de investigación. 18
3.3.1 Preguntas de investigación principales. 18
3.4 Hipótesis de trabajo. 19
3.5 Objetivos. 19
3.6 Recursos empleados en la investigación. 20
4 Fundamentos teóricos. 21
4.1 Antecedentes históricos. 21
4.1.1 El cálculo de la latitud. 21
4.1.2 El problema del cálculo de la longitud. 23
4.1.3 Determinación de la forma de la Tierra. 24
4.1.4 La misión geodésica hispanofrancesa de 1735. 26
4.1.5 Desarrollo de la geodesia en los siglos XIX y XX. 27
4.2 Elipsoide de referencia. 28
4.2.1 Definición. 28
4.3 Datum geodésico. 29
4.4 Principales elipsoides de referencia a nivel global. 30
4.5 El geoide. 31
4.5.1 Definición. 31
4.6 Modelos gravimétricos de la Tierra. 32
4.6.1 Medición del campo gravitatorio terrestre. 32
4.6.2 Mareas de equilibrio. 32
4.7 Refracción astronómica en la atmósfera terrestre. 34
4.7.1 Estructura de las capas de la atmósfera. 34

4.7.2 35
4.7.3 Efecto de la corriente de chorro estratosférica en el índice de refracción. 36
4.7.4 Dependencia del índice de refracción con la temperatura, humedad, presión y otras variables 39
4.7.5 Ondas de gravedad atmosféricas. 46
4.7.6 Mareas atmosféricas. 47
5 Resultados 49
5.1 Diferencia en la geolocalización entre dos modelos terrestres diferentes 50
5.2 Mareas de equilibrio: 65
6 Conclusiones 73
7 Líneas futuras de investigación: 75
8 Bibliografía 76
9 Anexos 78
9.1 Demostración 1. Representación del radio de la elipse en función de la latitud y semiejes. 78
9.2 Demostración 2. Relación entre la desviación en arcosegundos y el error en la superficie en metros. 80
9.3 Coordenadas astronómicas. 82
9.3.1 Sistema de coordenadas horizontal. 82
9.3.2 Sistema de coordenadas ecuatoriales horarias. 82
9.3.3 Sistema de coordenadas ecuatoriales absolutas. 83
9.4 Código Python 1. Creación del mapa de desviación cenital entre dos modelos terrestres diferentes de la librería ICGEM. 84
9.5 Código Python 2. Mareas de equilibrio. 85
9.6 Codigo Python 3. Mareas de equilibrio. Generación de gráficas. 91
9.7 Código Python 4. Mareas de equilibrio. Generación de mapas. 92
9.8 Código Python 6. Cálculo del índice de refracción 93
9.9 Código Python 7. Cálculo del radio terrestre para un elipsoide y cálculo de la desviación en superficie según la latitud del elipsoide. 95
9.10 Código Python 8. Cálculo del índice del índice de refracción y gradiente de refracción de dos puntos. 95

1.1 Tabla de figuras

Figura 1: Latitud geocéntrica y latitud geográfica (elaboración propia) 21
Figura 2: Astrolabio. 22
Figura 3: Cuadrante. 22
Figura 4: Sextante. 23
Figura 5: Prototipo de celatone creado por Galileo Galilei. 24
Figura 6: Diferentes modelos de la Tierra sugeridos por Cassini y Newton/Huygens. 25
Figura 7: Expediciones a Laponia y Virreinato del Perú 26
Figura 8: Elipse y semiejes. (Elaboración propia). 28
Figura 9: Superficie del geoide y elipsoide y ángulo entre sus cénit. (Elaboración propia). 31
Figura 10: Mareas de equilibrio debidas al efecto lunar, con la Luna sobre el ecuador. 33
Figura 11: Mareas de equilibrio debidas al efecto lunar sobre una cierta latitud. 33
Figura 12: Refracción de la luz considerando una hipotética atmósfera de tres capas (Elaboración propia) 35
Figura 13: Refracción debido a un frente de presiones o temperatura (Elaboración propia) 36
Figura 14: Efecto del Jet-Stream sobre Europa y Océano Atlántico para el 09 de septiembre de 2020, medido en millas por hora (1 mph ≈ 1.61kmh). 37
Figura 15: Efecto del Jet Stream en el hemisferio norte en intervalos trimestrales. 38
Figura 16: Efecto del Jet Stream en el hemisferio sur en intervalos trimestrales. De ambas figuras se deduce que el efecto de corriente en chorro es más probable en los meses fríos para cada hemisferio y para latitudes medias. 38
Figura 17: Variación del índice de refracción según diferentes variables atmosféricas. 40
Figura 18: Índice de refracción en función de la altura para una longitud de onda de 500 nm y una atmósfera estándar. Gráfica extraída de [22]. 40
Figura 19: Navegación de Nueva York a Lisboa, dividida en cinco puntos sobre un mapa de temperaturas donde los colores cálidos indican temperaturas más altas y los colores fríos temperaturas más bajas. Datos tomados para el día 22/09/2020 a 18:30 horas (UTC). Mapa extraído de la página web. 42
Figura 20: Variación del índice de refracción con la altitud. 44
Figura 21: Gradiente vertical de índice de refracción en función de la altitud. 45
Figura 22: Gradiente horizontal de índice de refracción en función de la altitud. 45
Figura 23: Imagen satélite de ondas de gravedad. Las ondas de gravedad producen un patrón periódico debido a oscilaciones de temperatura y condensación. 46
Figura 24: Presión en mb (eje Y) en función de la hora local en formato 24h (eje X) para diferentes estaciones meteorológicas en Argentina. 47
Figura 25: Mareas atmosféricas para regiones de diferente latitud. 48
Figura 26: Geoide (rojo) y elipsoide (negro). Los cénit de ambas figuras no necesariamente pasan por sus respectivos centros de masas (elaboración propia). 49
Figura 27: Elipsoide oblato genérico. 50
Figura 28: Geoide genérico (proporciones de las irregularidades en factor de escala 10000 para una mejor visualización). 50
Figura 29: Coeficientes armónicos para la elaboración de un geoide WGS72. 51
Figura 30: Coeficientes armónicos para la elaboración de un elipsoide WGS72. Hemos eliminado todas las filas excepto las correspondientes a (L, M): (0,0) y (2,0). 52

Figura 31: Visualización del coeficiente armónico (2,0) (elipsoide regular y simétrico en los polos). Imagen extraída de la página web. 52
Figura 32: Porción de 8x6 celdas tomada sobre la matriz de 59x117 celdas calculada. Los datos indican la desviación angular en arcosegundos, para varios puntos de la Tierra, entre el cénit de un modelo de geoide WGS72 y el cénit de un modelo de elipsoide WGS72. 53
Figura 33: Representación de la desviación del cénit entre el modelo de elipsoide WGS72 y el modelo de geoide WGS72, en arcosegundos. 54
Figura 34: Representación de las desviaciones cenitales en segundos de arco de ambos modelos WGS72 en Google Earth. 55
Figura 35: Representación de la desviación cenital entre un modelo de geoide EGM2008 y un modelo de geoide WGS66. 55
Figura 36: Cinturón o anillo de fuego del Pacífico. 56
Figura 37: Misma representación que la Figura 35, esta vez centrada en longitud 100ºW para una mejor comparación visual con la Figura 36. 56
Figura 38: Movimientos de placas tectónicas. 57
Figura 39: Movimiento de placas tectónicas. 58
Figura 40: Gran desviación cenital de 33 arcosegundos en posición 36.3ºN 11ºW (círculo rojo) para un mapa escalado hasta 40 arcosegundos. 58
Figura 41: Posición del epicentro del Terremoto de Lisboa de 1755, coincidente con la anomalía calculada en la Figura 40. 59
Figura 42: Geoide EGM2008 vs geoide WGS66 en escala de 0 a 12 arcosegundos. 59
Figura 43: Desviaciones del geoide WGS66 en comparación al geoide EGM2008 sobre España y zona mediterránea escalado para desvíos máximos de 12 arcosegundos. 60
Figura 44: Desviaciones del geoide WGS66 en comparación al geoide EGM2008 sobre España y zona mediterránea escalado para desvíos máximos de 40 arcosegundos. 60
Figura 45: Geoide EGM2008 vs geoide WGS72. 61
Figura 46: Desviaciones del geoide WGS72 en comparación al geoide EGM2008 sobre España y zona mediterránea escalado para desvíos máximos de 40 arcosegundos. 62
Figura 47 Geoide EGM2008 vs elipsoide EGM2008. 62
Figura 48: Desviaciones del elipsoide EGM2008 en comparación al geoide EGM2008 para la región centrada sobre el Mar de Filipinas. Ubicación de la Fosa de las Marianas marcada en círculo rojo. 63
Figura 49: Desviaciones cenitales sobre la Fosa de las Marianas para nuestros modelos terrestres estudiados. 63
Figura 50: Desviaciones del elipsoide EGM2008 en comparación al geoide EGM2008 sobre España y zona mediterránea escalado para desvíos máximos de 40 arcosegundos. 64
Figura 51: Componentes horizontales de mareas calculadas. (Elaboración propia). 65
Figura 52: Desviaciones cenitales en miliarcosegundos por efecto de mareas de equilibrio para los puntos elegidos A-E en el periodo de 11/10/2020 a 12:00 UTC a 12/10/2020 a 12:00 UTC. 66
Figura 53: Desviación cenital en miliarcosegundos por efecto de las mareas de equilibrio sobre los cinco puntos elegidos, para el día 11/11/2020 y a las 12:00 horas (UTC). 67
Figura 54: Desviaciones cenitales para un punto F en coordenadas φ=15ºS, λ =139ºE (Golfo de Carpentaria, Australia) en el periodo del 01 al 08 de enero de 2020. 67

Figura 55: Desviaciones cenitales para un punto G en coordenadas φ=0ºN, λ =0ºW (Golfo de Guinea) en el periodo del año 2020. 68
Figura 56: Desviaciones cenitales para un punto H en coordenadas φ=45ºN, λ =2ºW (Bahía de Arcachón, Francia) en el periodo del año 2020..... 68
Figura 57: Desviaciones cenitales para un punto I en coordenadas φ=34ºS, λ =79ºW (Isla Robinson Crusoe, Archipiélago de Juan Fernández, Chile) en un periodo de tres años. 68
Figura 58: Puntos F-I elegidos sobre un mapa de desviaciones cenitales producidas por efecto de mareas de equilibrio para el día 01/01/2020 a 00:01 horas (UTC)..... 69
Figura 59: Eclipse lunar del 05/07/2020. Máxima ocultación lunar a 04:31:11 (UTC) sobre Sudamérica y Antártida. Imagen extraída del Almanaque Náutico 2020 [34]..... 69
Figura 60: Desviaciones cenitales por efecto de mareas calculadas para el 05/07/2020 a las 04:31:11 (UTC). 70
Figura 61: Desviación cenital por efecto de mareas durante la Luna llena del 07/04/2020 a 18:08 horas (UTC). 71
Figura 62: Desviación cenital durante la Luna llena del 07/04/2020 a 18:08 horas (UTC) en proyección acimutal de Lambert. 71
Figura 63: Elipsoide oblato y radio terrestre en función de su latitud (elaboración propia). 78
Figura 64: Error en posición considerando un error de 1 arcosegundo y un valor del radio terrestre de 6371 km sobre una idealización de Tierra esférica (elaboración propia). 80
Figura 65: Sistema de coordenadas horizontal (Elaboración propia). 82
Figura 66: Sistema de coordenadas ecuatoriales horarias (Elaboración propia)..... 83
Figura 67: Sistema de coordenadas ecuatoriales absolutas (Elaboración propia). 83

1.2 Índice de tablas.

Tabla 1: Algunos elipsoides de referencia más utilizados en el siglo XIX y primeras décadas del siglo XX. 27
Tabla 2: Elipsoides de referencia más utilizados en España desde 1970. 29
Tabla 3: Elipsoides de referencia más utilizados históricamente a nivel internacional. 30
Tabla 4: Datos meteorológicos obtenidos para una altura a nivel del mar, en fecha 21/09/2020 a 18:30 UTC. 42
Tabla 5: Temperatura y presión elegidos para dos puntos separados 100 km. 43
Tabla 6: Resumen de los modelos terrestres estudiados. 64
Tabla 7: Dependencia de n con diferentes variables atmosféricas. 74
Tabla 8: Resumen de los efectos atmosféricos estudiados y su efecto en la geolocalización. 74
Tabla 9: Error sobre la superficie, para varias latitudes y para 1 arcosegundo de desviación, tomando como referencia el elipsoide GRS-80. 81

2 Introducción.

Los sistemas GNSS *(Global Navigation Satellite System)*, y en concreto el sistema GPS, han cambiado y mejorado sustancialmente la manera que poseemos de obtener la geolocalización. El GPS se utiliza en el día a día en la navegación comercial y en las operaciones marítimas, tanto civiles como militares, incluidas las tareas de búsqueda y rescate. Actualmente, este sistema es el método más rápido y preciso para la navegación, para medir la velocidad y también determinar la posición en todo el mundo con una mayor seguridad y eficiencia. No obstante, los sistemas GNSS presentan numerosos inconvenientes y vulnerabilidades. El uso del GPS nos puede ser denegado, intencionadamente o no. Además, las tormentas geomagnéticas pueden impedir totalmente el acceso a la señal de GPS, sobre todo en latitudes altas. Pero los eventos naturales, y aleatorios, constituyen, en realidad, un problema menor. El problema principal, especialmente dentro del ámbito militar, y particularmente en la guerra marítima, es la utilización de métodos electrónicos para bloquear o distorsionar el acceso a la señal GPS. El *jamming* y el *spoofing* son riesgos conocidos, y muy reales, de la navegación satelital, y esto es especialmente grave y preocupante dentro del ámbito de las armadas militares. Debido a que el sistema de navegación principal, el GPS, puede quedar inoperativo o inactivo con relativa facilidad debido a la acción intencionada enemiga, entonces es absolutamente primordial disponer de alternativas fiables al GNSS con las que los buques puedan posicionarse en la mar y realizar una navegación lo más precisa posible en todo momento.

En este trabajo estudiaremos la viabilidad de un hipotético nuevo proyecto para obtener la geolocalización de buques en alta mar sin hacer uso de sistemas por satélite (GPS, Galileo, etc.). La idea básica de este estudio es el uso de una cámara que tome imágenes cenitales del firmamento, para obtener posteriormente los datos necesarios de las mismas y para calcular la posición del observador con el menor error posible. Antes de crear este sistema, decidimos hacer una estimación del error que obtendríamos en la posición de nuestro buque solamente teniendo en cuenta la forma de la Tierra utilizada (geoide, elipsoide), los efectos de las mareas oceánicas y algunos efectos atmosféricos. Con este estudio, pretendemos analizar la viabilidad preliminar del proyecto, en función de si consideramos aceptables los máximos errores teóricos esperados, debido a las circunstancias previamente descritas.

Para este TFM, las imágenes que asumiremos serán ideales y perfectamente cenitales. Eso quiere decir que el centro de la imagen será el cénit del observador. Dado que existe software capaz de analizar imágenes astronómicas y facilitar la ascensión recta y declinación de cada punto de la fotografía, teóricamente con una única imagen perfectamente cenital, podríamos realizar de manera trivial la conversión a coordenadas geográficas, por lo que el cálculo de la posición del observador aparentemente se realizará sin dificultad.

Sin embargo, como en todo estudio, existen diferentes obstáculos. En primera aproximación, la transformación de ascensión recta y declinación a latitud y longitud se realizaría suponiendo un modelo de la Tierra localmente esférica sin ningún tipo de

perturbaciones gravitatorias ni atmosféricas, que evidentemente no es real. En este estudio, intentaremos cuantificar y comparar el error producido según la forma de la tierra asumida, utilizando para ello diversos elipsoides de revolución y el geoide. Con las desviaciones calculadas, podremos representar el error en un mapa para su análisis posterior.

En segundo lugar, y dentro del mismo apartado de cálculos derivados de la gravedad terrestre, trataremos de completar el error de posición obtenido haciendo un estudio sobre las mareas oceánicas. Nuestro objetivo es saber si el efecto de las mareas oceánicas es determinante o no sobre el error en la situación geográfica obtenida por métodos astronómicos, y qué magnitud tiene.

Por último, tendremos en cuenta el efecto producido por la atmósfera sobre la fotografía que realicemos de los astros. Por razones de extensión, nos es imposible realizar un cálculo detallado debido a la gran complejidad de esta materia, por lo que nos ceñiremos a comentar los efectos atmosféricos que consideramos más importantes que podrían alterar los cálculos de nuestras observaciones y que deberemos tener en cuenta para una futura fase del proyecto.

2.1 Contexto del Trabajo en el marco del Máster Ciencia y Tecnología Espacial.

En este trabajo hemos hecho uso de los conocimientos científicos aprendidos en el Máster en Ciencia y Tecnología Espacial 2019/2020 cursado en la Universidad del País Vasco (Bilbao), haciendo especial uso de las asignaturas de Astronomía y Astrofísica, Movimiento orbital y Física de la Atmósfera Terrestre, para interpretación astronómica de la fotografía obtenida de los astros, y su posterior corrección por anomalías atmosféricas y gravitatorias.

En una fase más avanzada del proyecto, haríamos uso de los conocimientos aprendidos en las asignaturas de Diseño de sistemas ópticos, Procesado de datos espaciales y también de Detectores y sensores para el análisis de las imágenes que se tomarán en esa futura segunda parte del proyecto.

3 Metodología.

3.1 Contexto de la investigación.

En el Real Instituto y Observatorio de la Armada en San Fernando (Cádiz) estamos trabajando en un proyecto de investigación relacionado con la navegación astronómica clásica, con la finalidad de evaluar la precisión máxima alcanzable empleando una cámara cenital como instrumento de medida. Las fuentes de error en el posicionamiento son numerosas, acometiendo en este TFM exclusivamente el estudio de tres factores: el error derivado de las irregularidades del campo gravitatorio terrestre sobre la superficie terrestre, especialmente sobre las zonas oceánicas, el efecto de las mareas de equilibrio y la contribución de algunos efectos atmosféricos a la desviación de la luz en la región cenital.

3.2 Problema central del TFM.

3.2.1 Descripción general.

El problema general que establece el contexto de la investigación es el estudio y análisis del error esperado si creamos un sistema capaz de obtener la posición geográfica sobre la superficie terrestre, que sea independiente de sistemas de posicionamiento GNSS. Este sistema funcionaría realizando únicamente una serie de fotografías nocturnas apuntando al firmamento. Haría uso de una cámara fotográfica que, por cuestiones de extensión para este trabajo, omitiremos, y que estaría centrada exacta, e idealmente sobre el cénit. Para simplificar, suponemos que la fotografía que se nos da es perfecta, es decir, que no contiene ningún tipo de error que afecte a la toma de datos, tales como aberraciones, contaminación lumínica, u otros factores. Mediante la reducción astrométrica de la fotografía, que en este trabajo igualmente omitimos, se nos proporcionarían unos datos de declinación y ascensión recta del cénit (basado en la vertical gravitatoria local) y es aquí donde comienzan los cálculos de este trabajo.

Existen multitud de condicionantes que afectan al error en la estimación de la posición geográfica. En este trabajo nos limitaremos al estudio de tres de estos factores: En primer lugar, un cálculo del error derivado de las diferencias gravitacionales entre diferentes modelos de la Tierra (elipsoides y geoide) y también debido a las mareas de equilibrio (gravitatorias) y, en segundo lugar, de manera cualitativa, el error resultante por efecto de la refracción atmosférica sobre los astros empleados para determinar la localización del cénit.

Para este proyecto de investigación, consideraremos que se ha realizado una fotografía a bordo de una plataforma que asumiremos estática sobre el mar. La idea de este estudio es que la cámara pueda utilizarse en plataformas marinas o buques a lo largo de todo el globo terrestre.

Además, para esta fase del proyecto la cámara apuntaría siempre al cénit, y tras un análisis astrométrico, el programa que corresponda nos habrá proporcionado los valores de declinación y ascensión recta del cénit. Conocidos estos datos, junto con la hora y fecha local, es posible obtener la posición geográfica donde se encuentra la cámara.

Pero existen una serie de factores que afectan a los cálculos. En primer lugar, debido a las irregularidades en la superficie terrestre, la determinación del cénit gravitatorio va a depender del modelo elegido para representar el modelo de la Tierra. Si tenemos en cuenta la forma real de la superficie terrestre a la hora de hacer los cálculos, el cénit al que apuntaría la cámara sería el correcto. Pero expresar de manera matemáticamente perfecta la forma o figura del globo terrestre es una tarea imposible debido a su complejidad real, por lo que necesitamos usar aproximaciones a la forma de la Tierra. Si utilizamos un modelo simplificado en nuestros cálculos de la posición del observador, dada la dirección del cénit medido, la posición geográfica obtenida sería ligeramente diferente de la real, ya que el modelo simplificado omite una caracterización detallada de las anomalías gravitatorias locales.

Dentro de los errores en la desviación gravitacional del cénit, debemos considerar el efecto que producen las mareas de equilibrio (también denominadas gravitatorias), ya que, debido al a la posición relativa de la Luna y el Sol respecto a la superficie terrestre, el vector de gravedad local variará ligeramente. Para este TFM estudiaremos cómo varía la componente horizontal del vector de gravedad para discernir si este es un efecto importante en la desviación de la posición geográfica calculada para el observador, o si, por el contrario, este efecto es tan bajo que podamos despreciarlo.

Por último, tendremos en cuenta el desvío producido por la refracción atmosférica y otros efectos atmosféricos sobre el cénit y los astros. La refracción atmosférica desviará la posición aparente de los astros principalmente hacia el cénit, variando sus distancias cenitales, es decir, dando a los astros unas coordenadas, de declinación y ascensión recta, “irreales”.

3.3 Preguntas de investigación.

3.3.1 Preguntas de investigación principales.

1. ¿Cuál es el error de posicionamiento derivado del empleo de diferentes modelos gravitatorios y de la forma de la Tierra, desde un simple elipsoide de revolución hasta los más complejos modelos de geoide?

2. ¿Es realmente importante tener en cuenta el efecto de las mareas de equilibrio, o por el contrario podemos despreciar este efecto?

3. ¿Cuáles son los efectos atmosféricos más importantes que deberemos tener en cuenta por su efecto sobre los datos de nuestras observaciones?

3.4 Hipótesis de trabajo.

Para esta fase cero del proyecto asumimos las siguientes consideraciones:

1. La fuente original de partida para la determinación de la posición son astrofotografías nocturnas que incluyen la región cenital. Los detalles técnicos de la obtención de dichas imágenes y las propiedades de la cámara no las consideramos en este trabajo.

2. Asumiremos que la reducción astrométrica de imágenes es perfecta y, por lo tanto, carece de error, con la finalidad de investigar la contribución de otras fuentes externas de error.

3. Los detalles del proceso de reducción astrométrica y la obtención de las coordenadas del cénit no son parte de este estudio. Suponemos que se nos proporcionan las coordenadas celestes del cénit tal y como se observa desde la posición del observador, sujeto exclusivamente a las irregularidades gravitatorias locales y a los efectos de refracción atmosférica.

4. El estudio del posicionamiento geográfico está limitado a superficies oceánicas medidas en el nivel medio del mar.

5. Sí consideramos los efectos de las mareas de equilibrio, pero no los movimientos irregulares de masas de agua por vientos o corrientes, ya que esto formará parte de un estudio posterior. Para facilitar los cálculos, consideramos la cámara y el equipo que toma los datos, situados sobre una plataforma estática y la superficie del mar en una condición ideal, perfectamente en calma (intensidad del mar 0 en escala Beaufort).

6. La variación de la posición de los polos geográficos y el desplazamiento de la corteza terrestre por la tectónica de placas están considerados implícitamente en los sistemas geodésicos de coordenadas empleados.

3.5 Objetivos.

1. Comparar los resultados del error de posicionamiento derivado del uso de diferentes modelos de Tierra para conocer qué modelo es el más adecuado.

2. Mediante gráficas, realizaremos un mapa de error del globo terrestre, indicando en qué regiones el error en la geolocalización obtenido es mayor o menor y en qué cantidad.

3. Conocer cuáles son los efectos atmosféricos que afectan en mayor medida al error en la posición.

3.6 Recursos empleados en la investigación.

1. Recursos bibliográficos.

2. Creación de una guía teórica donde se definen los conceptos más importantes.

3. Python 3.7 como lenguaje de programación, utilizando el programa Spyder como entorno de desarrollo integrado.

4. Modelos numéricos de geoide obtenidos del servicio web de ICGEM (*International Centre for Global Earth Models*).

5. Programa de la NASA Panoply para visualización de mapas.

6. Paquete Python Tidegravity, que hemos modificado para calcular las componentes horizontales, en el cálculo de las mareas de equilibrio.

7. Código Python de Mikhail Polyanskiy para el estudio de refracción atmosférica.

4 Fundamentos teóricos.

4.1 Antecedentes históricos.

4.1.1 El cálculo de la latitud.

La latitud es una de las dos coordenadas necesarias para obtener la posición geográfica en la superficie terrestre. Existe la latitud geocéntrica y latitud geográfica o geodésica. La primera se define como la distancia angular medida en grados entre un punto en la superficie terrestre y el paralelo o línea del ecuador, centrada en el centro de masas de la Tierra. La latitud geocéntrica es positiva si el punto se encuentra en el hemisferio norte y negativa para el hemisferio sur. Con latitud geográfica, nos referimos al mismo ángulo, pero esta vez no centrado en el centro de masas de la Tierra, sino en el punto donde corta la perpendicular al elipsoide en el punto con la línea del ecuador. En una hipotética Tierra esférica, ambas latitudes coincidirían. Es común denominar a la latitud y a la longitud con los símbolos griegos (φ, λ).

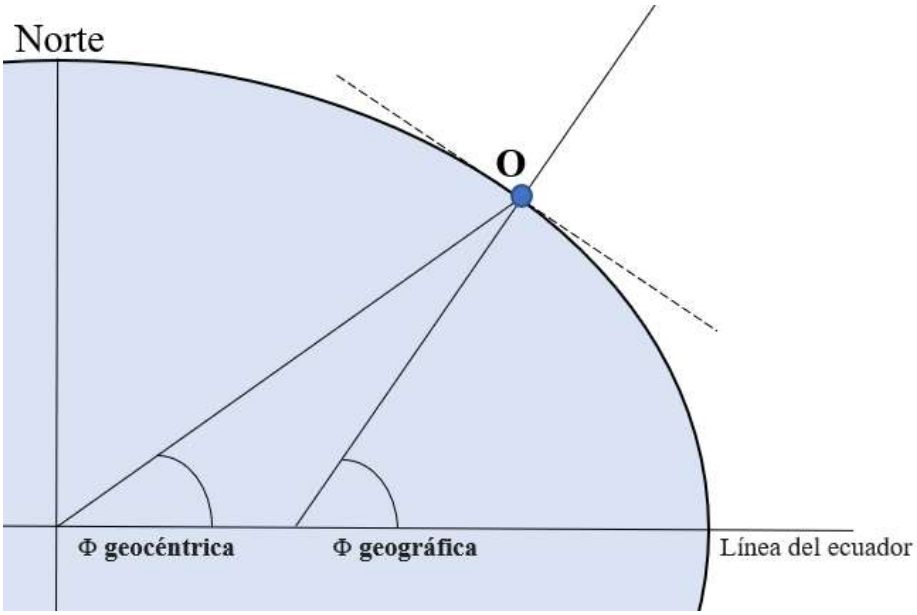


Figura 1: Latitud geocéntrica y latitud geográfica (elaboración propia)

En la antigüedad, se desconocía la verdadera forma de la Tierra. Históricamente, los marinos hacían uso de conocimientos astronómicos para obtener la latitud geográfica. El método comúnmente utilizado para determinar la latitud consistía en la observación de la máxima altura del sol al cénit. Desde la antigüedad, los marinos utilizaban el astrolabio, llegando este instrumento a la península probablemente de mano de los musulmanes [1].

Figura 2: Astrolabio[1].

También fue muy utilizado en la navegación tradicional el cuadrante, un instrumento a menudo metálico y formado por un sector graduado de 90º del que colgaba una plomada sobre una regla para indicar el ángulo que marcaba el astro sobre el horizonte. Con el cuadrante, los marinos de la época realizaban una medición no demasiado precisa de la altura del Sol respecto al horizonte. Para mejorar la exactitud, se tenía en cuenta la declinación del Sol según el día del año. Los cálculos se realizaban con la ayuda de unas tablas de declinación del Sol, cuyo grado de exactitud mejoró sustancialmente Johannes Kepler. Con esto, solo tenían que añadir o restar para obtener una aproximación de la latitud.

Figura 3: Cuadrante[2].

En 1759, John Campbell inventa el sextante, obteniéndose una mayor precisión en el cálculo de la latitud respecto a sus predecesores instrumentos náuticos. El sextante fue ampliamente utilizado en la navegación hasta la llegada de los sistemas electrónicos y sistemas de geolocalización por satélite [2][3].

---

[1] Imagen extraída de la página web:
https://hemisferium.info/es/coleccion-i-basic/132-nombre.html
[2] Imagen extraída de la página web:
http://enigmaticamentejsd.blogspot.com/2015/11/como-construir-un-cuadrante.html

Figura 4: Sextante[3].

4.1.2 El problema del cálculo de la longitud.

Sin embargo, en el siglo XVI, los marinos aún no disponían de métodos para hallar la longitud, por lo que realizaban estimaciones según el rumbo y la distancia recorrida o velocidad de sus naves. Para hallar la velocidad del buque, se arrojaban al mar piezas de madera unidas a cabos o cuerdas con una serie de nudos separados a una distancia constante, y se contaba la cantidad de nudos que pasaban en un tiempo medido con un reloj de arena. De este método, procede la actual unidad de medición náutica conocida como *nudo*. En la antigüedad, tener conocimiento de la posición en longitud de una nave, podía suponer la diferencia entre arribar o no, al puerto deseado. El hecho de no conocer la longitud con precisión, supuso que numerosos buques perdieran el rumbo en la mar, además de otros incidentes históricos tales como la incertidumbre para delimitar el meridiano del Tratado de Tordesillas.

Ya en el siglo XVII, el astrónomo y filósofo italiano Galileo Galilei, creó sin demasiado éxito, un prototipo de telescopio unido a un casco, con el que, tras una formación en cálculos astronómicos, cualquier marino podría observar las lunas de Júpiter desde dos puntos diferentes en la mar, y de esta manera, tratar de obtener la diferencia en longitud navegada. La idea de observar los satélites del planeta gigante no funcionó a bordo de los buques, por la tremenda dificultad de las observaciones a bordo de naves en movimiento. Galileo continuó desarrollando y mejorando el prototipo, creando un sofisticado artilugio de suspensión para la época, para tratar de minimizar los movimientos del observador. Este modelo de observación a bordo de los barcos finalmente se desechó por falta de apoyos, pero sí se utilizó para plataformas en tierra firme [4].

[3] Imagen extraída de la página web:
https://spanish.alibaba.com/product-detail/nautical-sextant-109727633.html

Figura 5: Prototipo de celatone creado por Galileo Galilei[4].

Para calcular la diferencia de longitud con precisión por métodos astronómicos, es necesario tener al menos dos observadores en dos puntos diferentes en la Tierra, sincronizados con la misma hora, para poder comparar ambas observaciones. Históricamente, el problema del cálculo de la longitud se debió principalmente a la escasez de sistemas eficaces para medir el tiempo, más allá de simples relojes de arena. El astrónomo Edmund Halley había propuesto a finales del siglo XVII realizar el cálculo de la hora mediante la observación de la ocultación de los astros por la Luna, sin embargo, el gran avance en la determinación de la longitud no llegó hasta 1735, cuando de mano del británico John Harrison se empezaron a fabricar los primeros cronómetros marinos [2][5].

4.1.3 Determinación de la forma de la Tierra.

La determinación de la forma de la Tierra ha sido objeto de diversas teorías a lo largo de la historia [6]. Las primeras teorías mencionaban a la Tierra como una llanura infinita, como un disco plano, o incluso como una esfera perfecta, siendo en la Grecia clásica donde surgieron las primeras teorías de la Tierra esférica y donde se realizan los primeros cálculos de la medida de su radio. La esfericidad de la Tierra se había demostrado a través de las ramas de las matemáticas y la astronomía, y se hacía evidente con las primeras misiones a las Américas, pero no es hasta 1522, con la primera vuelta al mundo capitaneada por Magallanes y finalizada por Juan Sebastián de Elcano, cuando se pone fin a toda clase de duda sobre la posibilidad de circunnavegar la Tierra. Más tarde, surgen las teorías de la Tierra elipsoidal. Isaac Newton (Inglaterra, 1643-1727), defendió este modelo en el siglo XVII en su publicación *"Philosophiae Naturalis Principia Mathematica"* (1687), afirmando que la Tierra es esferoide oblato, es decir, achatado por los polos, con un valor de aplanamiento calculado por él de 1/230. Años más tarde, Huygens (Países Bajos, 1629-1695) en su memoria "*Discours sur la cause de la pesanteur*" de 1690, reafirma la teoría de Newton de la Tierra achatada por los polos, aunque con diferente magnitud de aplanamiento [3].

[4] Imagen extraída de la página web:
https://medium.com/@jbenson/the-celatone-galileos-forgotten-failure-676002694988

No obstante, existían otra serie de teorías que sugerían que la Tierra está achatada por el ecuador. Uno de los defensores de que la Tierra tuviera mayor radio terrestre en los polos que en el ecuador era el ítalo-francés Giovanni Cassini (Génova, 1625-1712) y también sus descendientes. Ninguno de ellos aceptaba las teorías newtonianas de la gravitación universal ni certeza en la mecánica de Newton. Cassini llegó a la hipótesis de la Tierra achatada en el ecuador con medidas astronómicas a través de la triangulación del meridiano de París. Surgió así una disputa científica entre los defensores de los cálculos astronómicos por parte de Francia (Picard, La Hire, Cassini) y los cálculos matemáticos de la física de Newton por parte de Gran Bretaña [3].

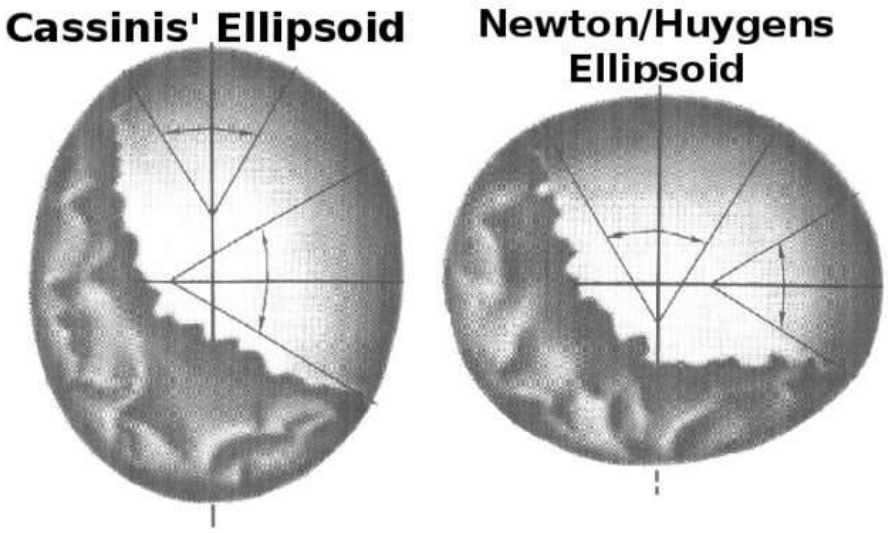


Figura 6: Diferentes modelos de la Tierra sugeridos por Cassini y Newton/Huygens[5].

Resulta curioso el interés especial de los científicos en esta etapa de la historia acerca del cálculo de la forma de la Tierra. En *Los Caballeros del Punto Fijo* [7], se dice:

"*Es a partir de finales del siglo XVII cuando se produce un interés especial en evaluar físicamente las dimensiones reales de la Tierra. Esta evolución es paralela al proceso de colonización de nuevos territorios y al incremento de intercambios comerciales que le sigue.*"

Podemos inferir por tanto que el estudio de la forma de la Tierra viene dado por un interés especial en los científicos y políticos del siglo XVII y XVIII, debido al auge del colonialismo europeo, surgiendo en esta época importantes teorías y expediciones científicas para conocer la verdadera forma del globo terrestre.

[5] Diferentes modelos de la Tierra sugeridos por Cassini y Newton/Huygens. Imagen extraída de la página web: *https://culturacientifica.com/2018/04/20/antonio-de-ulloa-el-marino-que-leia-a-newton/cassini-vs-newton/*

4.1.4 La misión geodésica hispanofrancesa de 1735.

Para comprobar la forma de la Tierra y tratar de demostrar la supremacía científica en Europa, la Academia de Ciencias de Francia decide enviar dos expediciones científicas hacia dos lugares con latitudes muy diversas; Laponia en el Océano Ártico y el Virreinato del Perú en el ecuador. La expedición al océano ártico en latitud 76ºN duró dos años (1736-1737) y fue liderada por Maupertuis y Clairaut, mientras que la expedición en el ecuador se extendió durante diez años (1735-1744) y fue comandada por los franceses Charles Marie de la Condamine, Pierre Bouguer y Luis Godin. En esta última, formaron parte de la misión los tenientes de navío españoles Jorge Juan y Antonio de Ulloa. El objetivo de estas expediciones era repetir el mismo procedimiento: calcular la longitud de arco recorriendo 3º y comparar los resultados de ambas expediciones.

Figura 7: Expediciones a Laponia y Virreinato del Perú [6].

Este largo experimento aportó novedosos descubrimientos en varias ramas de la ciencia. Se confirmó por primera vez que el radio terrestre era mayor en el ecuador que en los polos, como había afirmado Isaac Newton algunas décadas antes. Tras este experimento, el historiador y filósofo francés Voltaire dijo a Maupertuis: *"Je vous félicite, Monsieur, d'avoir aplati la Terre et les Cassini*[7]*"*, ya que, tras este experimento había quedado demostrado que, durante tres generaciones, la familia de científicos Cassini había errado en sus cálculos [8]. Los resultados de ambas expediciones supusieron una revolución científica que impulsó a Francia a liderar el trono de las ciencias en Europa. Gracias a estos cálculos, se pudo conocer la distancia del polo al ecuador terrestre. Este dato ayudó

[6] Expediciones a Laponia y Virreinato del Perú. Imagen extraída de la página web: *https://elcomercio.pe/tecnologia/ciencias/tierra-mision-geodesica-francesa-ecuador expedicion-cientifica-permitio-determinar-forma-tierra-noticia-664091-noticia/*

[7] Traducción: *"Le felicito, Señor, por haber aplanado la Tierra y a los Cassini."*

décadas más tarde a la contribución de la creación del metro como unidad de medida oficial.

En 1792, la Academia de Ciencias de París realiza por orden de Luis XVI un cálculo geodésico del meridiano de París entre las ciudades de Dunkerque y Barcelona. Este experimento junto a las expediciones de 1735, hizo posible definir al metro como la diez millonésima parte del arco de meridiano del polo al ecuador (se definió como distancia del polo al ecuador 10.000 km). El primer patrón del metro fue proclamado en Francia en 1799 aunque posteriormente esta unidad de medida fue corregida y redefinida en otras tres ocasiones. El sistema métrico se aceptó de manera internacional en la primera Conferencia General de Pesos y Medidas, de 1889 [9].

Hasta el siglo XIX, los estudios sobre la forma de la Tierra continuaron con una serie de importantes avances en la obtención del geoide por parte de Stokes, quien determina la forma del geoide a través de anomalías gravitatorias, así como Green, Bruns, Laplace, Bessel o Fourier entre otros.

4.1.5 Desarrollo de la geodesia en los siglos XIX y XX.

En los siglos XIX y XX, la geodesia o cálculo de la forma de la Tierra adquiere connotaciones no solo científicas, sino también militares y políticas. Conocer con exactitud las distancias entre dos ciudades o países podía ser una ayuda añadida de los intereses militares de un bando [10].

Ya en esta época se tiene constancia de la definición del geoide. Los estudios continuaron con una serie de importantes avances por parte de Stokes, quien determina la forma del geoide a través de anomalías gravitatorias. Además, en este periodo se comienza a trabajar con elipsoides de referencia. Algunos de los más utilizados fueron [8]:

Elipsoide	**Semieje mayor**	**Achatamiento**
Everest (1830)	6 377 276	1/300.8
Airy (1830)	6 376 542	1/299.3
Bessel (1840)	6 377.397	1/299.15
Clark (1888)	6 378.245	1/293.5
Hayford (1909)	6 378.388	1/297

Tabla 1: Algunos elipsoides de referencia más utilizados en el siglo XIX y primeras décadas del siglo XX.

Además, se crean diversas asociaciones para establecer conceptos y realizar proyectos internacionales en común, tales como la *Association Géodésique Internationale* (1886).

El siglo XX comienza con las aportaciones del geodesta alemán Helmert, quien introduce un método para determinar la forma del geoide, partiendo de datos de la desviación de la plomada. En esta primera mitad de siglo, la geodesia es una ciencia en auge, con importantes aportaciones de varios autores, entre ellos, Hayford, Love, y Väisälä. Es

partir de 1957, con el lanzamiento del *Sputnik*, cuando la geodesia comienza a tomar un camino diferente, el de la obtención de datos por satélite. A partir de entonces, se ponen en órbita los primeros satélites destinados al modelado de la forma de la Tierra, con un auge de la geodesia satelital a partir de la década de 1970 [8].

4.2 Elipsoide de referencia.

4.2.1 Definición.

La forma real de la Tierra se corresponde con un cuerpo irregular de gran complejidad. Debido a la dificultad matemática para representar su superficie, cada país o continente utiliza un modelo simplificado diferente de la Tierra, de manera que la superficie real de la Tierra y el modelo simplificado elegido coincidan al máximo en la región de la superficie terrestre que nos interese [11].

Este modelo simplificado se conoce como elipsoide de referencia, y es una aproximación del geoide, pero más simple que este por ser una figura simétrica de densidad constante, sin irregularidades en la superficie (montañas, océanos, etc.). A diferencia del geoide, el elipsoide de referencia sí puede expresarse matemáticamente. Este elipsoide se construye haciendo girar una elipse alrededor de su semieje menor, que es coincidente con el eje polar. De esta manera obtenemos una aproximación de la forma de la Tierra ligeramente achatada por los polos. Por tratarse de un elipsoide de revolución, el elipsoide de referencia puede determinarse con los mismos parámetros de la elipse; el semieje mayor *a* (radio de la Tierra en el ecuador) y el semieje menor *b* (radio de la Tierra en los polos).

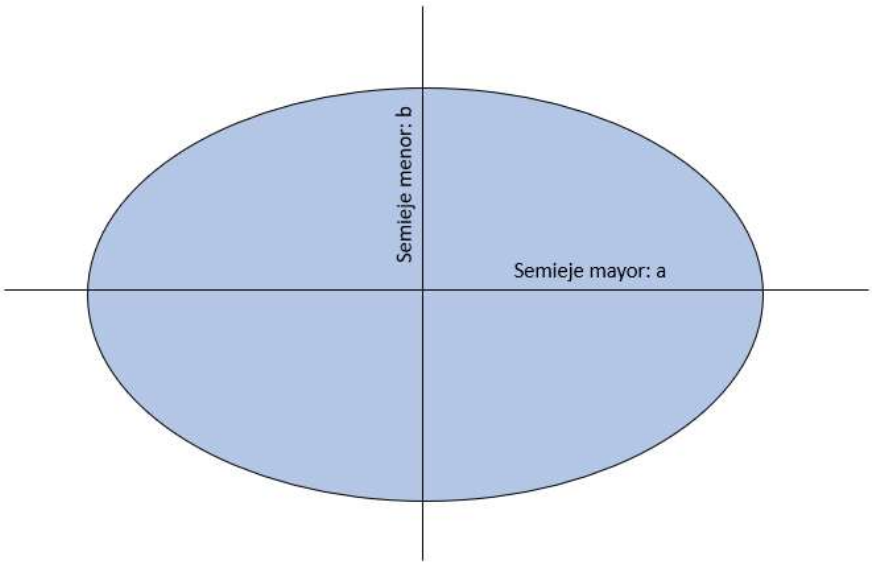


Figura 8: Elipse y semiejes. (Elaboración propia).

Es común referirnos al elipsoide según su achatamiento, definido como *f*, siendo este valor la razón entre la diferencia entre el semieje mayor (a) y el semieje menor (b) de un elipsoide y el semieje mayor:

$$f = \frac{a - b}{a}$$

Como ejemplo en España, los elipsoides de referencia más utilizados en España desde 1970 han sido los siguientes [12]:

Denominación	**Ámbito**	**Periodo validez**	**Semieje mayor**	**Achatamiento**
Struve	Nacional	Hasta 1970	6 378.293	1/294.73
Internacional, European Datum 1950, ED50	Continental	Hasta 2007	6 378 388	1/297
World Geodetic System 1984 WGS84	Global	Actual	6 378 137	1/298.257223563

Tabla 2: Elipsoides de referencia más utilizados en España desde 1970.

4.3 Datum geodésico.

En realidad, no es posible representar sobre un mapa o carta toda la superficie terrestre con precisión arbitraria. La superficie terrestre posee demasiadas irregularidades para poder plasmarlas en una misma carta de navegación. Por ello, para facilitar la tarea y minimizar el error, se ha creado el concepto de datum. El datum es un sistema de referencia que se toma sobre todo el globo, o más generalmente, sobre una región más pequeña de este. La posición del datum se sitúa donde el elipsoide de referencia utilizado y el geoide coinciden. Por tanto, en un mapa o carta de navegación, las coordenadas no son universales, sino que están referidas al datum elegido. Cuando el datum se refiere a toda la superficie del globo, se le conoce como *datum global* y cuando este se refiere a una porción de la superficie terrestre, se le denomina *datum local*:

Datum global: El mapa comprende todo el globo terrestre. La IERS (*International Rotation and Reference Systems Service*) es la encargada de la definición de este datum. Como referencia para situar el origen, se toma el centro de masas de la Tierra incluyendo océanos y atmósfera. Un ejemplo de datum global es el WGS84, el más utilizado a nivel global por ser el utilizado por GPS [13].

Datum local: El mapa está limitado a una región de la Tierra (por ejemplo, Europa). Se intentan minimizar las diferencias entre un punto de la superficie referido a un elipsoide de referencia y respecto al mismo referido al geoide. Un ejemplo de datum local es el

ETRS (*European Terrestial Reference System*) del año 1989, sistema de georreferencia oficial en la Península Ibérica y Baleares y el cual utiliza el elipsoide de referencia GRS80 [12]**.**

4.4 Principales elipsoides de referencia a nivel global.

Existe una gran variedad de elipsoides diferentes. Con el paso de los años, se ha ido perfeccionando el modelo global de elipsoide para que el error con la superficie terrestre sea mínimo. A modo global, los elipsoides más utilizados son [11]:

Parámetros del elipsoide						
Elipsoide	**Abrev.**	**Clarke 1858**	**GRS-80**	**WGS84**	**WGS72**	**Internacional 1924 (Hayford)**
Eje mayor	a	6378293.645	6378137	6378137	6378135	6378388
Inverso del achatamiento	f	294.26	298.25722	298.2572236	298.26	297
Achatamiento	1/f	0.003398355	0.0033528	0.003352811	0.003352779	0.003367003
Eje menor	b	6356617.938	6356752.314	6356752.314	6356750.520	6356911.946
Excentricidad	e	0.082372092204	0.0818191910	430.081819190843	0.081818810663	0.081991889979

Tabla 3: Elipsoides de referencia más utilizados históricamente a nivel internacional.

El elipsoide más reconocido y utilizado es el *World Geodetic System* de 1984 (WGS84), que como ya hemos comentado, es el más usado por ser el elipsoide de referencia elegido por el sistema GPS. El elipsoide WGS84 ha tenido varias actualizaciones y actualmente se puede encontrar en diversas fuentes como EGM2008 [8].

[8]Información disponible en la página web: *https://info.nga.mil/GandG/update/index.php?dir=wgs84&action=wgs84#tab_egm2008*

4.5 El geoide.

4.5.1 Definición.

El geoide es una representación bastante aproximada de la forma de la Tierra que se forma uniendo todos los puntos equipotenciales, es decir, con misma atracción gravitatoria, la equivalente en el nivel medio del mar y para una determinada época. El geoide no tiene en cuenta las masas de tierra, no considera el movimiento de los mares y océanos (mareas y corrientes), y no tiene en cuenta las perturbaciones exteriores tales como la interacción de otros cuerpos del sistema solar.

El geoide no es una superficie uniforme, ni tiene representación matemática exacta por tratarse de una figura irregular. Estas irregularidades se deben principalmente a la variación de densidades en el interior de la Tierra. Como efecto, el radio de la Tierra difiere en cada punto de la superficie, resultando una superficie que delimita la dirección de la plomada, siendo esta perpendicular a la superficie del geoide en el punto donde se encuentre [11].

Si comparamos la superficie del geoide con la de un elipsoide de referencia, encontraremos diferencias de separación de hasta ±100 metros. A esta diferencia se le conoce comúnmente como ondulación del geoide. El mejor modelo matemático de geoide para la península es el EGM2008, cuyas ondulaciones respecto al elipsoide WGS84 difieren entre 40 y 60 metros [12].

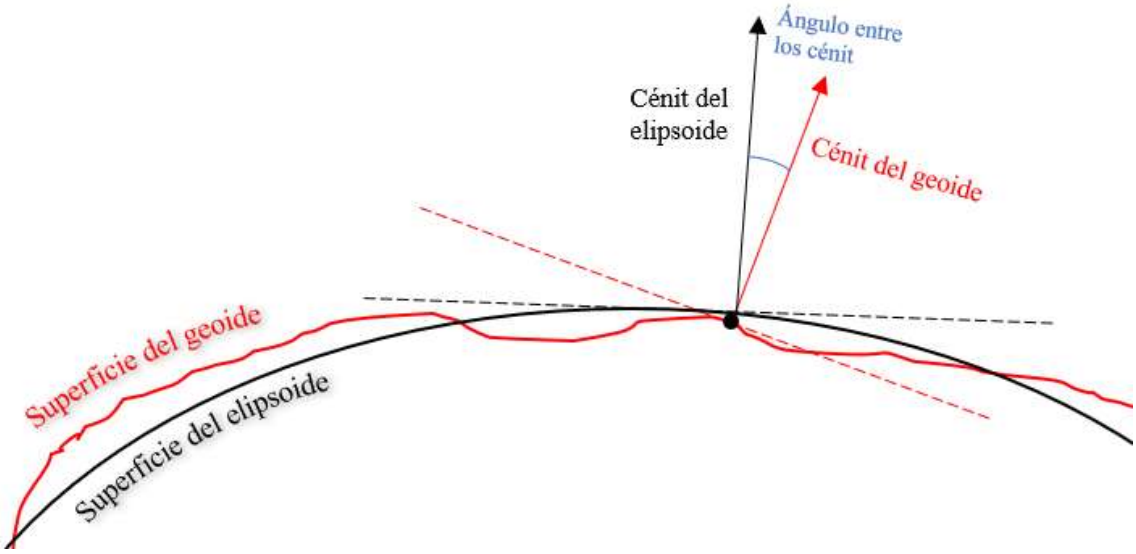


Figura 9: Superficie del geoide y elipsoide y ángulo entre sus cénit. (Elaboración propia).

4.6 Modelos gravimétricos de la Tierra.

4.6.1 Medición del campo gravitatorio terrestre.

El valor de la gravedad en la Tierra difiere de unos puntos a otros, siendo su dependencia más importante con la latitud y la altitud. Otros factores que influyen en el valor de la g medida son la distribución de masas en el interior de la Tierra, la rotación de la Tierra, y las posiciones relativas del Sol y la Luna, que originan las mareas. Las medidas del valor de g pueden ser medidas absolutas o medidas relativas. El primero se refiere al valor real de la gravedad en un punto en concreto sobre la superficie, y el segundo la diferencia del valor de g con otro punto conocido, siendo esta medida más fácil de obtener. Dependiendo del tipo de problema al que nos enfrentemos, se utilizarán medidas absolutas de la gravedad o medidas relativas. Los valores extremos de la gravedad en la superficie varían entre 9.78 ms^{-2} y 9.83 ms^{-2} [15]. Como en este trabajo nos centraremos exclusivamente en altitudes en el nivel medio del mar, el valor que más nos afecta a nuestros cálculos será la latitud donde se encuentre el observador.

4.6.2 Mareas de equilibrio.

La teoría de mareas de equilibrio asume que las aguas que cubren la superficie de la Tierra responden de manera instantánea a las fuerzas de la Luna y el Sol que producen las mareas y forman una superficie de equilibrio bajo la acción de esas fuerzas. La teoría desprecia la fricción y la inercia y la distribución irregular de las masas terrestres de la Tierra. A pesar de que los movimientos reales de mareas no se aproximan a estas suposiciones, la teoría es válida como ayuda para una visualización de la distribución de las fuerzas sobre la superficie terrestre. La marea teórica formada bajo estas condiciones se conoce como mareas de equilibrio o como mareas gravitacionales o astronómicas. A pesar de que el Sol es notablemente mayor en tamaño que la Luna, debido a la menor distancia con la Tierra, la Luna es el cuerpo celeste que más afecta a las mareas en la Tierra, con un orden aproximado de fuerza de atracción de las mareas de 2/1 respecto al Sol.

Con la Luna sobre el ecuador, la altura máxima de marea se encontrará en latitudes cercanas a cero y el mínimo se encontrará en los polos. La componente horizontal de las mareas de equilibrio es mínima en los polos y en el ecuador y máxima en latitudes intermedias (Figura 10)

Con la luna situada al norte o al sur del ecuador, se producirá una desigualdad debida a la declinación, con dos máximos y dos mínimos de altura de marea para cada punto de la Tierra, siendo estos diferentes excepto en el ecuador, donde deberían ser iguales (Figura 11).

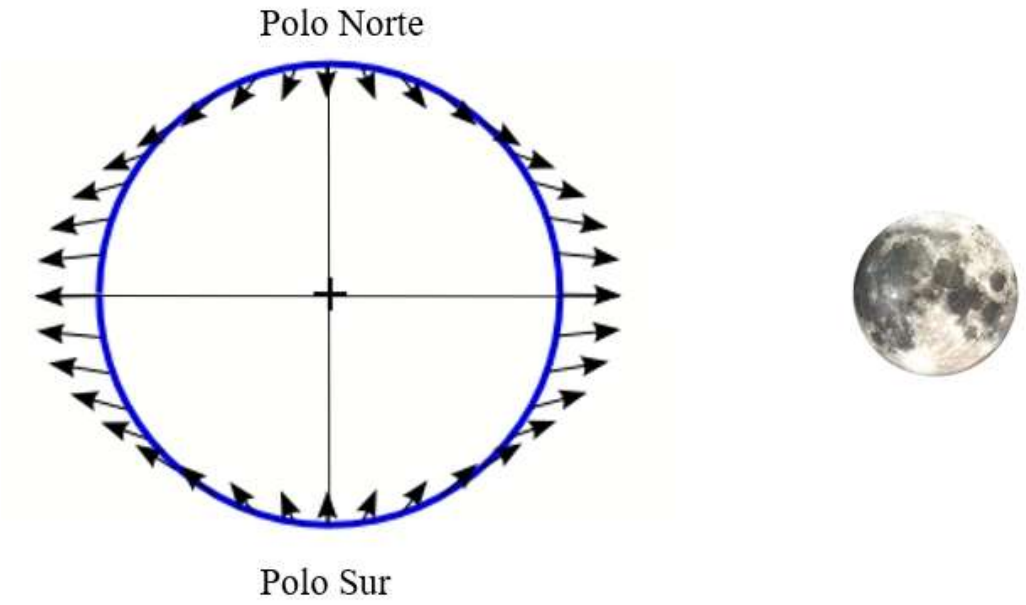


Figura 10: Mareas de equilibrio debidas al efecto lunar, con la Luna sobre el ecuador[9].

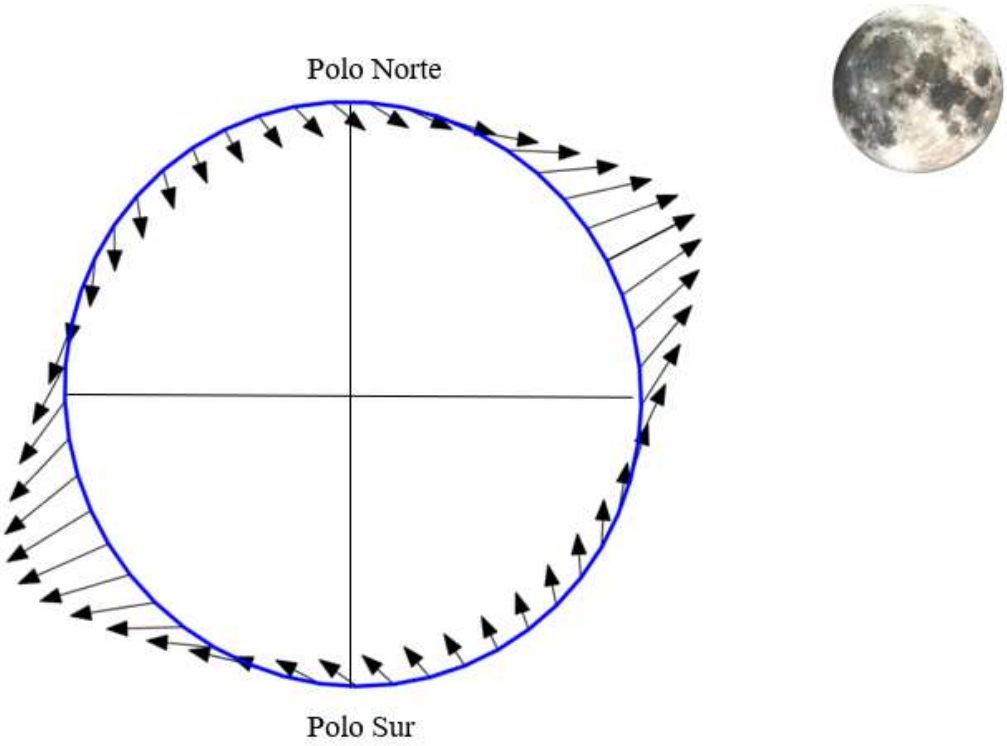


Figura 11: Mareas de equilibrio debidas al efecto lunar sobre una cierta latitud.

[9] Mareas oceánicas debidas al efecto lunar. Imagen modificada sobre la imagen extraída de la página web: *https://en.wikipedia.org/wiki/Tidal_force#/media/File:Field_tidal.svg*

4.7 Refracción astronómica en la atmósfera terrestre.

4.7.1 Estructura de las capas de la atmósfera.

Como indica el profesor D. Jon Sáenz en la asignatura de Física de la Atmósfera Terrestre[10]: *"La atmósfera es una capa delgada en comparación con la Tierra, el 99.9 % de su masa está situada por debajo de 50 km (radio terrestre: $R_T \approx 6370$ km). Existen diversos criterios para definir una estructura vertical en la atmósfera: propiedades eléctricas, composición química y/o perfil de temperatura"*

La mayoría de los estudios dividen la atmósfera en cinco capas bien diferenciadas según su composición; troposfera, estratosfera, mesosfera, termosfera y exosfera. Otros estudios se basan en la temperatura y solo tienen en cuenta las cuatro primeras [16]. Cada una de ellas posee unas propiedades de presión, densidad e incluso composición, como veremos a continuación, diferentes. Por ello, el índice de refracción de cada una de ellas tiene un valor distinto [17]. Por otra parte, estas propiedades mencionadas no siempre están distribuidas homogéneamente ni en la dirección vertical ni en la horizontal, lo que también puede provocar cambios en el índice de refracción del aire. En cuanto a su composición, la atmósfera terrestre es una mezcla de gases, principalmente nitrógeno, oxígeno, argón, dióxido de carbono, neón, helio y vapor de agua.

En el aire, la luz se propaga a una velocidad levemente menor que la velocidad de la luz en el vacío. La ley de Snell, derivada del principio de Fermat, indica que esta diferencia de velocidad provoca a su vez un cambio de dirección con respecto a la normal a la superficie de separación entre dos medios de diferentes velocidades, o índices de refracción.

La luz proveniente de las estrellas, en su trayectoria hacia el observador, sufre diversas desviaciones: en la atmósfera, en el telescopio, en la cámara, en el ojo del observador, etc. En este trabajo nos ceñiremos solamente a los efectos atmosféricos. La refracción es la variación en el ángulo cenital de las estrellas, lo que lleva a una variación entre la posición geométrica real del astro a medir y la posición aparente. La refracción atmosférica es máxima cerca del horizonte y mínima en el cénit.

Estas variaciones del índice de refracción mencionadas en el apartado 4.7.1 producen sobre la luz que nos llega de los astros una serie de cambios, tanto en dirección (refracción, *seeing*) como en intensidad (extinción, centelleo). Una de las consecuencias de la refracción astronómica, es que los astros aparentan tener más altura sobre el horizonte de la que en realidad tienen. La refracción astronómica es mucho más visible cerca del horizonte, haciendo adelantar la hora de salida aparente del Sol sobre la hora que tendría en una Tierra sin atmósfera.

---

[10] Asignatura Física de la Atmósfera Terrestre impartida en el Máster en Ciencia y Tecnología Espacial 2019/2020 (Universidad del País Vasco)

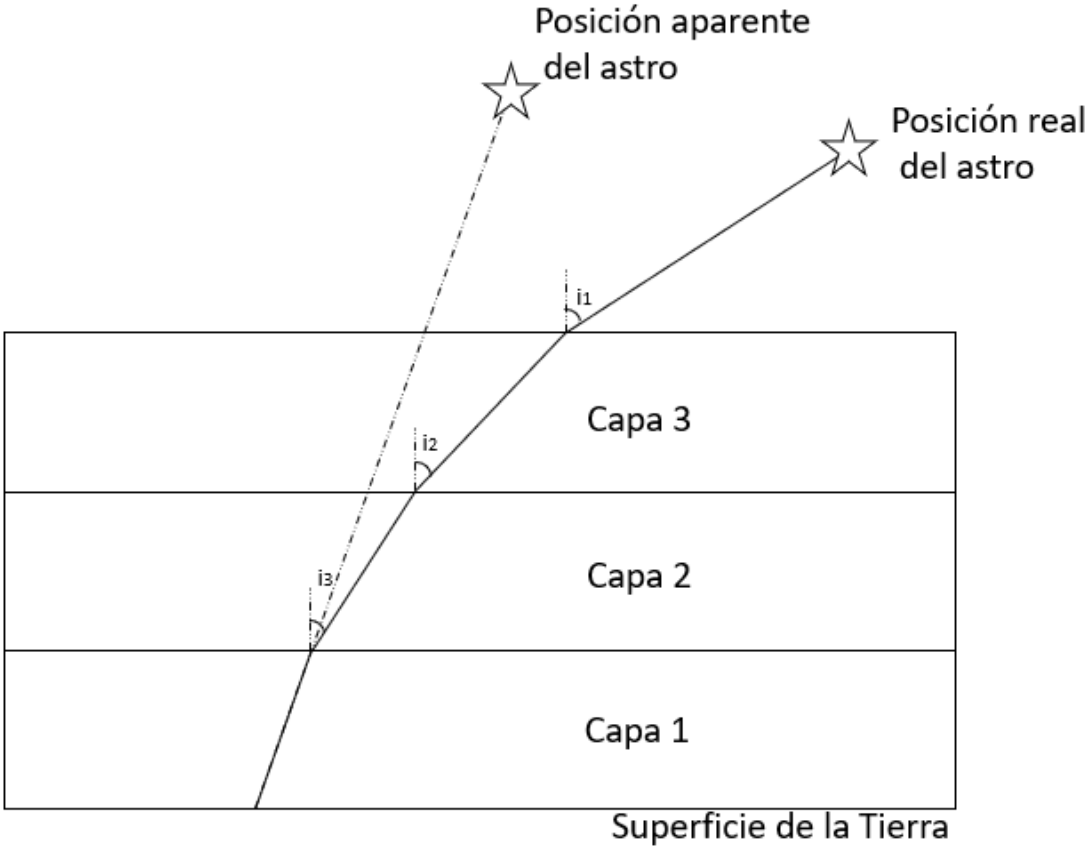


Figura 12: Refracción de la luz considerando una hipotética atmósfera de tres capas (Elaboración propia)

El error atmosférico, dependerá de varios factores, entre ellos [18]:

- El grosor y forma considerados para cada capa (capa plana, capa esférica, capa elipsoidal, etc.).
- Los movimientos y corrientes de aire.
- El grado de humedad.
- El índice de refracción elegido para cada capa.

Por otra parte, la refracción atmosférica dependerá de los valores de presión y temperatura principalmente, tales como borrascas o anticiclones.

4.7.2

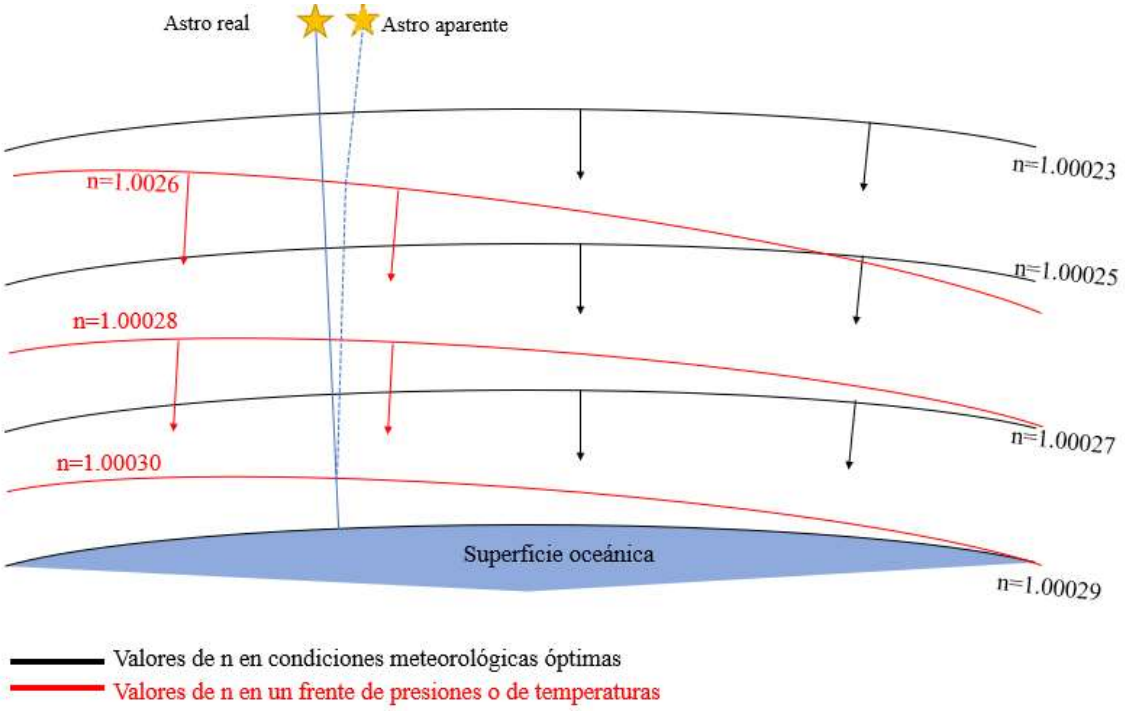


Figura 13: Refracción debido a un frente de presiones o temperatura (Elaboración propia)

En la Figura 13 representamos un esquema de la refracción producida por un frente de presiones o temperatura, tales como una borrasca o frente frío de temperaturas, que nos variará el gradiente del índice de refracción y con ello nos desviará la imagen del astro respecto a su posición real.

4.7.3 Efecto de la corriente de chorro estratosférica en el índice de refracción.

Los fenómenos de turbulencia atmosférica también influyen en el índice de refracción del aire. La turbulencia puede ser originada por diversos motivos; convección, corriente en chorro, deformaciones orográficas [19], pero en última instancia está asociada a movimientos verticales de masa de aire con diferentes propiedades en un medio que en otras condiciones podríamos considerar como homogéneo.

La turbulencia atmosférica produce variaciones locales de las características del aire, que a su vez resultan en índices de refracción levemente diferentes, distorsionando las imágenes que vemos a través de una atmósfera turbulenta. Este fenómeno recibe el nombre de *seeing*. En las mejores condiciones la amplitud de este efecto ronda los 0.6 segundos de arco para observatorios situados a gran altitud (Hawái, Canarias) y por lo general, errores de más de 1 arcosegundo para observatorios a baja altura. Es por ello, que no debemos esperar un error cero para nuestras observaciones, pero sí un valor pequeño por tratar en este TFM exclusivamente estrellas cenitales.

La corriente en chorro es un fenómeno descubierto en la década de 1930 tras los primeros estudios sobre las rutas aéreas, y los tiempos de vuelo empleados por las aeronaves. Se puso en evidencia por primera vez que, a cierta altitud, existe una turbulencia que afectaba de manera importante a los pilotos de aeronaves. La corriente en chorro es un fuerte flujo de aire en la tropopausa que se sitúa en una altitud de entre 10 y 15 km sobre la superficie, dependiendo de la latitud y la estación del año, a lo largo de la práctica totalidad del globo terrestre y que se mueven en dirección hacia el Este en ambos hemisferios, debido al sentido de rotación de la Tierra. Las corrientes en chorro o *Jet Streams*, son de mayor intensidad e irregularidad en zonas alrededor de latitud 60º para ambos hemisferios, y son más débiles y estables en la zona subtropical. Las corrientes en chorro afectan y se ven afectadas por el clima. Se dirigen hacia los polos en verano, ya que se ven afectados por los cambios de temperatura y presión [20]. Suelen tener algunos cientos de kilómetros en anchura y verticalmente menos de 5 kilómetros de espesor.

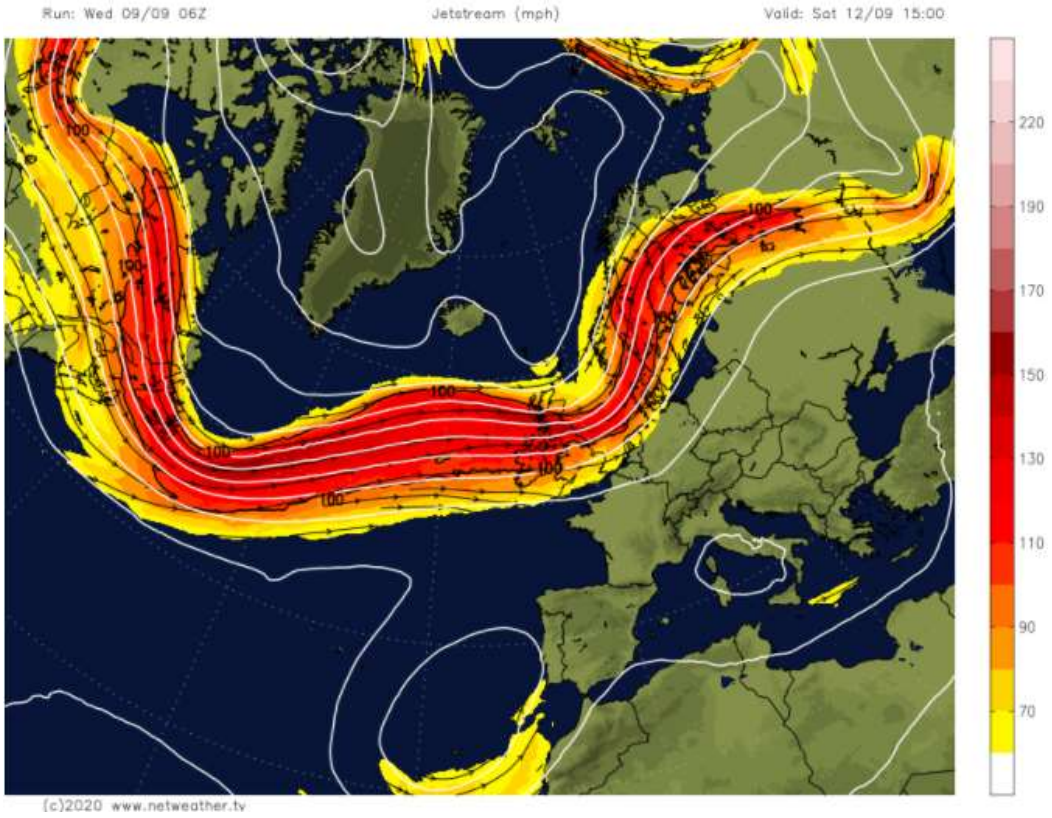


Figura 14: Efecto del Jet-Stream sobre Europa y Océano Atlántico para el 09 de septiembre de 2020, medido en millas por hora (1 mph ≈ 1.61kmh)[11].

A continuación, en la Figura 15 y Figura 16 se muestran, respectivamente, las distribuciones de frecuencias medias estacionales del efecto de la corriente de chorro para los hemisferios norte y sur [20].

[11] Imagen extraída de la página web: https://www.netweather.tv/charts-and-data/jetstream .

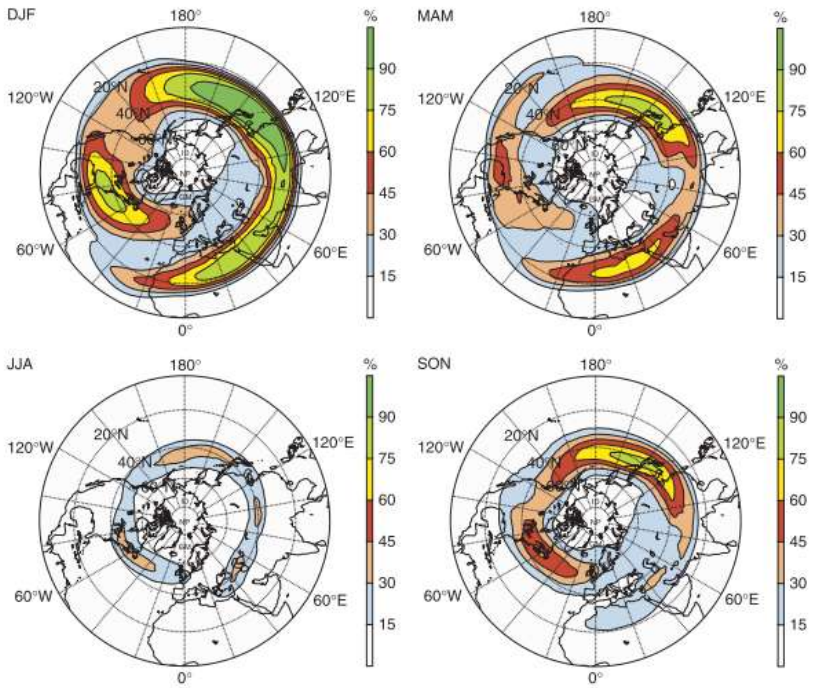


Figura 15: Efecto del Jet Stream en el hemisferio norte en intervalos trimestrales.

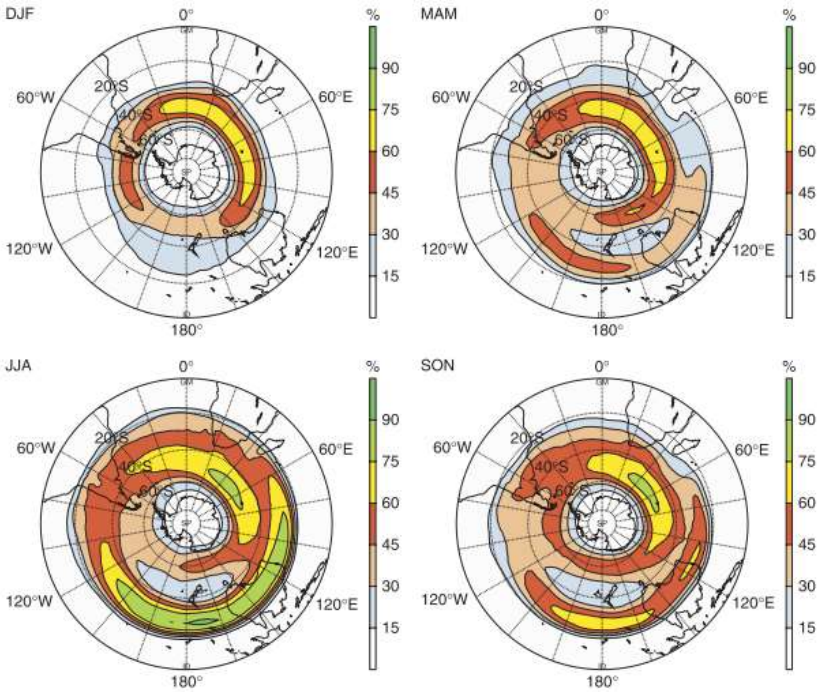


Figura 16: Efecto del Jet Stream en el hemisferio sur en intervalos trimestrales. De ambas figuras se deduce que el efecto de corriente en chorro es más probable en los meses fríos para cada hemisferio y para latitudes medias.

El autor en [20] dice: *"Obsérvese que para el período de tiempo estacional, el porcentaje de frecuencia en un lugar determinado equivale aproximadamente al promedio estacional del número de días en que una corriente de chorro está presente en las proximidades"*. El efecto de la corriente en chorro, es por tanto un efecto que se puede prever en cierta medida, y es una de las contribuciones fundamentales al *seeing* atmosférico.

Para futuras fases del proyecto, buscaríamos un servicio meteorológico que nos aporte datos fiables sobre la corriente en chorro, tales como el servicio web Meteoblue[12] y con los datos obtenidos de longitud y latitud, presión, humedad relativa y temperatura, crearíamos mapas para obtener un dato estimado en arcosegundos que añadiríamos al error obtenido por el resto de efectos mencionados en este trabajo.

4.7.4 Dependencia del índice de refracción con la temperatura, humedad, presión y otras variables

A la hora de calcular la variación del índice de refracción según los valores atmosféricos, nos encontramos con el problema de que la refracción del aire es difícil de medir con precisión. Históricamente ha habido diversos estudios y mediciones y, con los años, se han utilizado varias fórmulas diferentes para representar la curva de dispersión del aire según diferentes autores. Hay que tener en cuenta que la refracción generalmente se analiza para 15°C y los autores suelen referirse al aire seco y no al aire con un porcentaje de vapor de agua. A día de hoy, uno de los aportes mejor considerados a estos estudios son las ecuaciones de Ciddor (1996) y Ciddor-Hill (1999) [21].

En Internet, existen diferentes páginas web que hacen uso de las ecuaciones de Ciddor, permitiéndonos obtener directamente los valores de refracción en función de los datos de longitud de onda del rayo de luz, temperatura, presión atmosférica, humedad del aire y concentración de dióxido de carbono [13].

En el apartado 9.8 adjuntamos el código Python aportado en 2017 por el físico Mikhail Polyanskiy, del Brookhaven National Laboratory, Nueva York (Estados Unidos) que nos permite analizar la dependencia del índice de refracción según diferentes variables. Este código está basado en las ecuaciones de Ciddor [14].

---

[12] *https://www.meteoblue.com/*

[13] *https://emtoolbox.nist.gov/Wavelength/Ciddor.asp*

[14] Código Python disponible en la página web: *https://github.com/polyanskiy/refractiveindex.info-scripts/blob/master/scripts/Ciddor%201996%20-%20air.py*

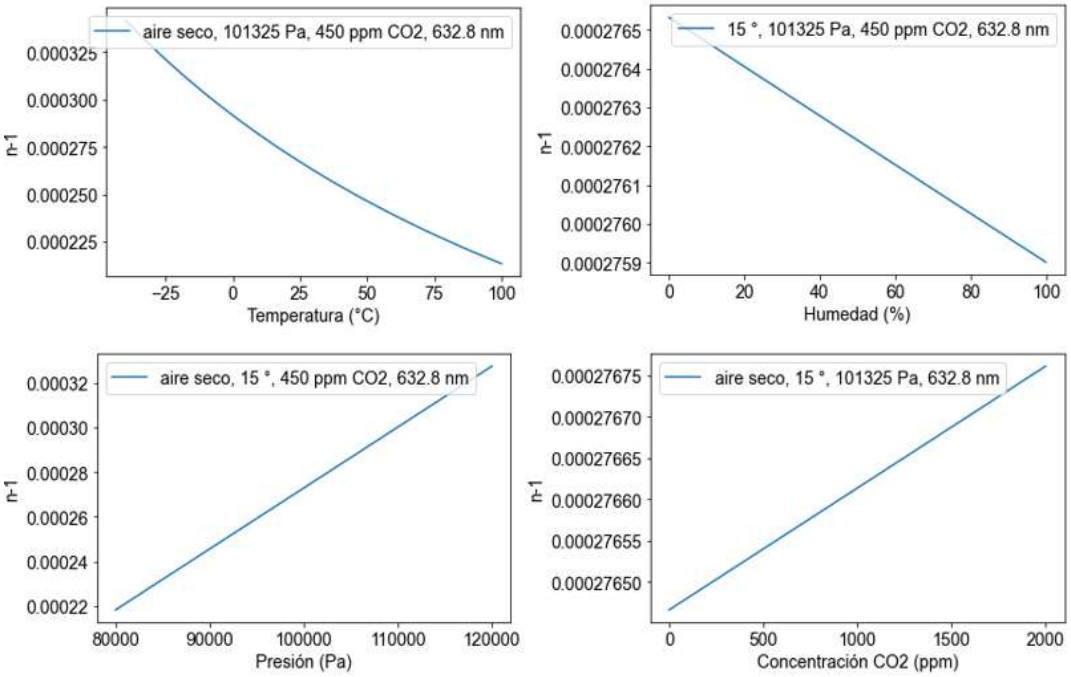


Figura 17: Variación del índice de refracción según diferentes variables atmosféricas.

Ejecutando el código Python del apartado 9.8, observamos gráficamente como el índice de refracción aumenta con la presión y concentración de CO_2, y disminuye con la humedad del aire y temperatura.

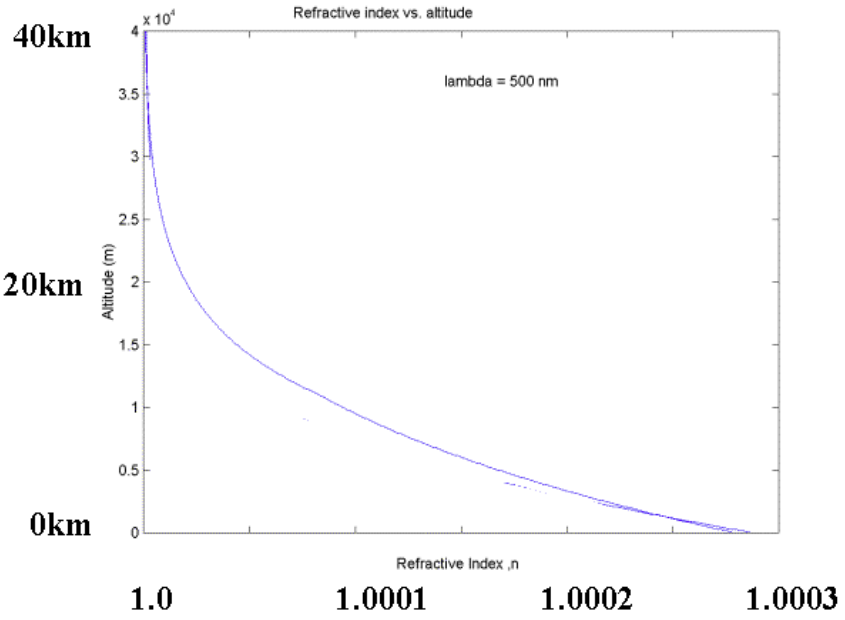


Figura 18: Índice de refracción en función de la altura para una longitud de onda de 500 nm y una atmósfera estándar. Gráfica extraída de [22].

Los datos de la gráfica de la Figura 18 han sido calculados para una atmósfera estándar. De esta gráfica deducimos que, en la atmósfera, el índice de refracción del aire aumenta de manera no lineal a medida que descendemos en altura. El valor de n alcanza un valor de 1.00023 en la superficie terrestre para una temperatura de 273K y presión del aire a nivel del mar [23]. Sin embargo, para nuestro estudio, tendríamos que calcular el valor del índice de refracción según las condiciones meteorológicas del lugar. La desviación final será debida a los gradientes del índice de refracción en su componente perpendicular a dicha trayectoria. Por tanto, habría que estimar el gradiente de refracción en nuestra vertical cuya componente predominante estimamos que será debida a los frentes de presiones o de temperaturas. Una vez conocidos los valores de los índices de refracción para los perfiles atmosféricos que nos interesen, procederíamos a calcular el ángulo en arcosegundos que nos produce dicha refracción.

Para tomar los datos atmosféricos que nos interesen, existen multitud de servicios web que proporcionan la información en tiempo real para cualquier punto de la Tierra. Uno de ellos es la página web *Earth Null*[15]. Esta página web toma los datos de GFS (*Global Forecast System*), NCEP (*National Centers for Enviromental Prediction*), US *National Weather Service*. Introduciendo las coordenadas y fecha que nos interesen, podemos obtener los datos meteorológicos necesarios para la utilización de las fórmulas de Ciddor.

Pongamos como ejemplo, que realizamos una navegación de Nueva York a Lisboa y queremos conocer un pronóstico de los datos atmosféricos que nos vamos a encontrar. Para este ejemplo hemos dividido la derrota en cinco puntos (Puntos A-E) y hemos comprobado las componentes meteorológicas para el día 22 de septiembre de 2020 a las 18:30 horas UTC (Tiempo Universal Coordinado)[16]:

[15] *https://earth.nullschool.net/*

[16] Hora UTC: 2 horas menos que el huso horario utilizado en España peninsular en verano y 1 hora menos en invierno. Ejemplo: Las 18:00 horas en Madrid en verano equivalen a las 16:00 horas UTC.

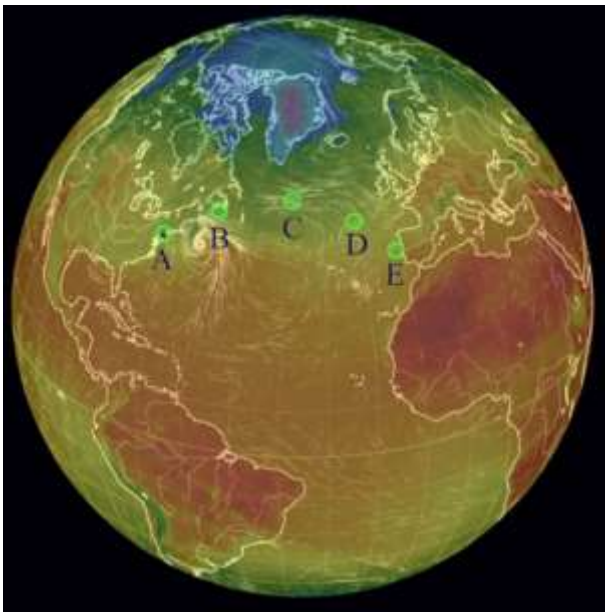


Figura 19: Navegación de Nueva York a Lisboa, dividida en cinco puntos sobre un mapa de temperaturas donde los colores cálidos indican temperaturas más altas y los colores fríos temperaturas más bajas. Datos tomados para el día 22/09/2020 a 18:30 horas (UTC). Mapa extraído de la página web[17].

Los datos obtenidos para los puntos elegidos son:

Punto	**Coordenadas**	**Temperatura en superficie**	**Presión en superficie**	**Humedad relativa en superficie**	**Porcentaje de CO2 en superficie**
A (Nueva York)	40.53ºN 73.85ºW	15.9ºC	1018 hPa	39%	209 ppbv[18]
B	46.35ºN 55.06ºW	12.3ºC	1022 hPa	87%	99 ppbv
C	48.97ºN 38.76ºW	13.3ºC	1023 hPa	72%	104 ppbv
D	45.83ºN 14.53ºW	16.7ºC	1012 hPa	74%	100 ppbv
E (Lisboa)	38.70ºN 9.13ºW	20.23ºC	1014 hPa	86%	88 ppbv

Tabla 4: Datos meteorológicos obtenidos para una altura a nivel del mar, en fecha 21/09/2020 a 18:30 UTC.

Los datos de la

[17] https://earth.nullschool.net/

[18] ppbv (partes por mil millones en volumen).$ppbv = \mu g \cdot dm^{-3}$

Tabla 4 han sido tomados para una altura a nivel del mar. Igualmente, podemos tomar los mismos datos a diferentes alturas. Una vez tomados los datos meteorológicos, veamos cómo calcularíamos los índices de refracción. En este apartado vamos a comentar una simplificación del procedimiento y solamente para la troposfera, por ser la región de alturas donde más afecta la refracción atmosférica.

Según [24], en la Troposfera podemos definir el índice de refracción n como:

$$n = 1 + (n_0 - 1) \cdot \frac{273.16}{1013.25} \cdot \frac{p}{T} - \frac{0.055 \cdot e}{T} \cdot 10^{-6}$$

Donde n_o es el índice de refracción en condiciones estándar de aire para una longitud de onda dada, p es la presión en milibares, T es la temperatura en Kelvin, y e es la presión parcial de vapor de agua en milibares. El autor explica que el último término es muy pequeño y podemos despreciarlo sin perder apenas precisión. Operando, llegamos a la siguiente ecuación:

$$n = 1 + \frac{273.16}{1013.25}(n_0 - 1) \cdot \frac{p_0}{T_0} \exp\left(-\frac{\mu \cdot g_0 \cdot z}{R \cdot T_0}\right)$$

Donde g_0 es el valor de la gravedad local para la altura dada en $m \cdot s^{-2}$, μ es la masa molecular y R la constante universal de los gases ideales.

Esta ecuación indica la variación del índice de refracción con la altura, dados unos datos de presión y temperatura conocidos. En el apartado 9.10 incluimos un código Python en el que hemos introducido dos perfiles verticales separados horizontalmente entre sí (por ejemplo 100 kilómetros) y estudiamos de qué manera varía el índice de refracción en función de la altura para cada perfil, suponiendo que la temperatura y/o presión al nivel mar varía ligeramente entre ellos. Por ejemplo, tomamos un punto F al nivel del mar y un punto G separado horizontalmente 100 km con la misma temperatura y una presión ligeramente diferente:

	Temperatura	**Presión**
Punto F	288K	980 mb
Punto G (situado horizontalmente a 100 kilómetros del punto F)	288K	996 mb

Tabla 5: Temperatura y presión elegidos para dos puntos separados 100 km.

Ejecutando la ecuación anterior y con los datos de la

Tabla 5, ejecutamos el código Python del punto 9.10 y obtenemos las siguientes gráficas:

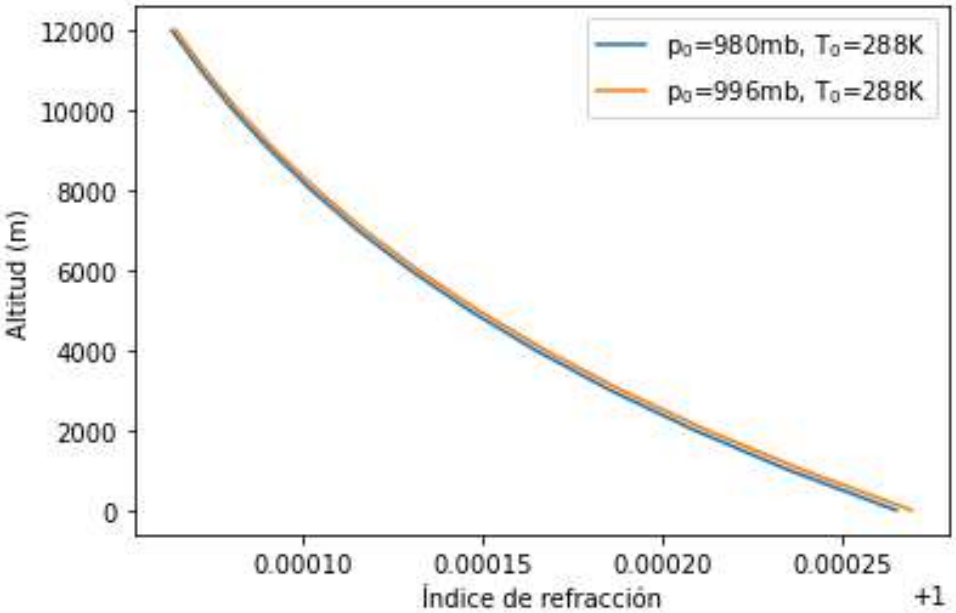


Figura 20: Variación del índice de refracción con la altitud.

En la Figura 20 representamos la variación del índice de refracción con la altitud, para los dos casos de la

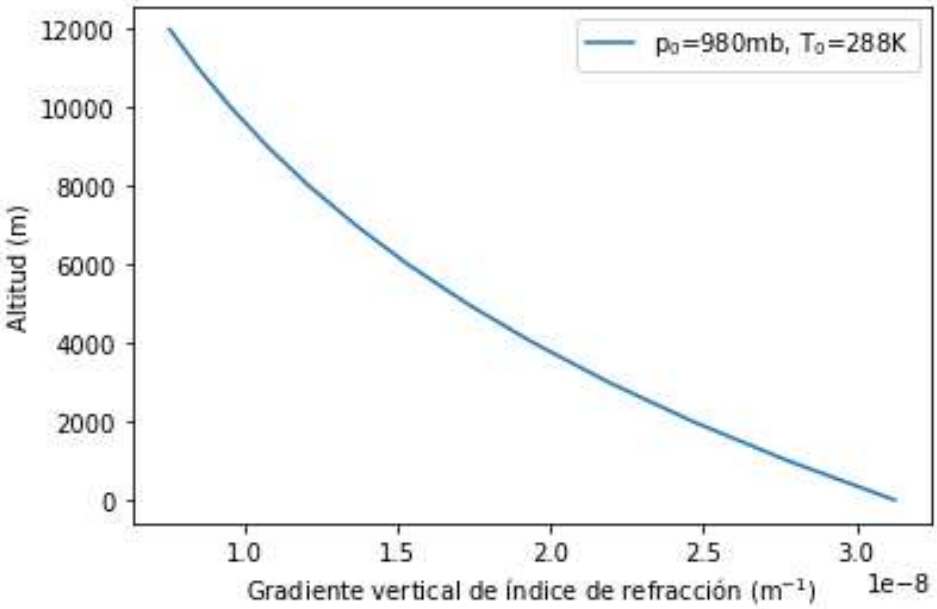


Tabla 5. Podemos observar cómo la curva correspondiente a una menor presión atmosférica en la superficie, presenta en todo momento un índice de refracción ligeramente por debajo de la otra.

Figura 21: Gradiente vertical de índice de refracción en función de la altitud.

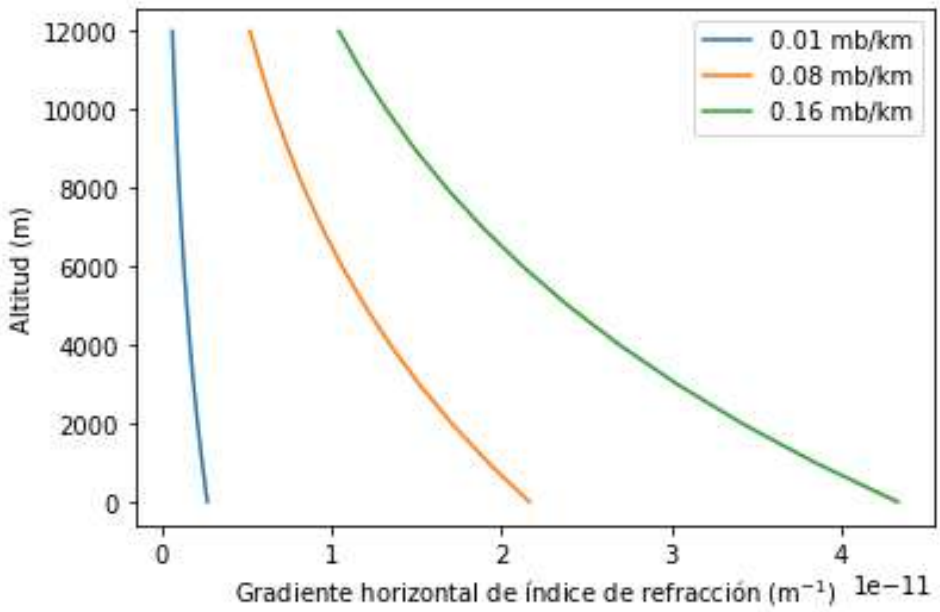


Figura 22: Gradiente horizontal de índice de refracción en función de la altitud.

En la Figura 21 representamos el gradiente vertical del índice de refracción en función de la altitud. Cabe destacar que este es tres órdenes de magnitud mayor que el gradiente horizontal de índice de refracción.

La Figura 22 representa la dependencia con la altura del gradiente horizontal del índice de refracción (es decir, la variación del índice de refracción por cada metro de distancia recorrida horizontalmente), originado por un gradiente de presión atmosférica al nivel del mar. En la gráfica se representan tres casos diferentes, correspondientes a variaciones leves (0.01 mb/km), grandes (0.08 mb/km) y muy grandes (propio de un huracán, 0.16 mb/km).

Estos cálculos y gráficas son una simplificación del procedimiento que seguiríamos en una fase de proyecto más avanzada, puesto que en este caso solo estamos teniendo en cuenta los datos meteorológicos de presión y temperatura y únicamente estamos estudiando las curvas en la troposfera.

4.7.5 Ondas de gravedad atmosféricas.

Las ondas de gravedad atmosféricas son ondas similares visualmente a las ondas producidas en el agua. Estas ondas son resultado de la perturbación de un fluido, por ejemplo, durante una tormenta o durante corrientes de aire ascendentes en zonas montañosas. El fluido perturbado intenta volver a su posición de equilibrio, produciendo este tipo de fenómeno. La gravedad, actúa como fuerza restauradora, actuando en contra de cualquier movimiento vertical en la atmósfera, haciendo que el aire oscile de manera vertical. El efecto de las ondas de gravedad es más fuerte en las capas más altas de la atmósfera, especialmente en la mesosfera, entre alturas 50-90 km. Las ondas de gravedad son un efecto minoritario dentro de los movimientos en la troposfera pero sí son importantes en la mesosfera y termosfera [25].

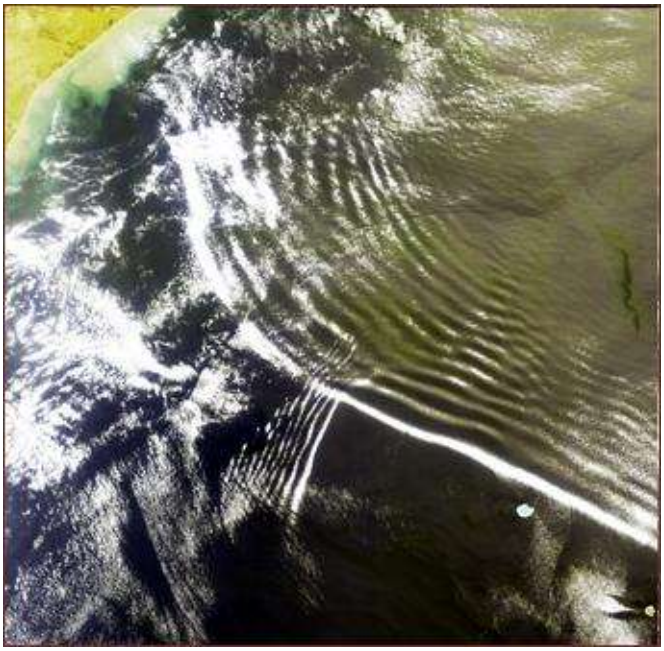


Figura 23: Imagen satélite de ondas de gravedad. Las ondas de gravedad producen un patrón periódico debido a oscilaciones de temperatura y condensación[19].

Las ondas de gravedad atmosféricas poseen una longitud de onda horizontal que comprenden de decenas a cientos miles de kilómetros, y algunos kilómetros en vertical. En latitudes medias, su periodo suele variar desde algunos minutos hasta un día. Las ondas de gravedad contienen un grupo de velocidades horizontales cercanas a cero [26], por tanto, no afectarán de manera significativa a los resultados en cuanto a desviación, pero sí pueden originar un aumento de la nubosidad en la zona que nos dificultará las observaciones [27].

[19] Imagen extraída de la página web:
http://tallex.at.fcen.uba.ar/index_archivos/page0023.htm

4.7.6 Mareas atmosféricas.

Las mareas atmosféricas, también conocidas como mareas barométricas, son un efecto por el que la presión para un mismo punto de la Tierra no se mantiene constante, sino que sufre una serie de altibajos periódicos, de manera similar al efecto de las mareas de equilibrio sobre los océanos.

Algunos autores afirman que las mareas atmosféricas se deben en su mayor parte a la absorción de los rayos ultravioleta en la estratosfera [28]. Esta variación de presión es mayor en los trópicos que en latitudes medias, donde no afectan tanto las corrientes en chorro, borrascas y anticiclones. Las variaciones de presión por efecto de las mareas atmosféricas no son demasiado importantes, y aparecen con más claridad con el buen tiempo. Estas pueden ser periódicas diarias o anuales [29][30].

En la siguiente imagen, ilustramos un análisis de la variación de presión llevado a cabo en Argentina en diferentes estaciones [31]:

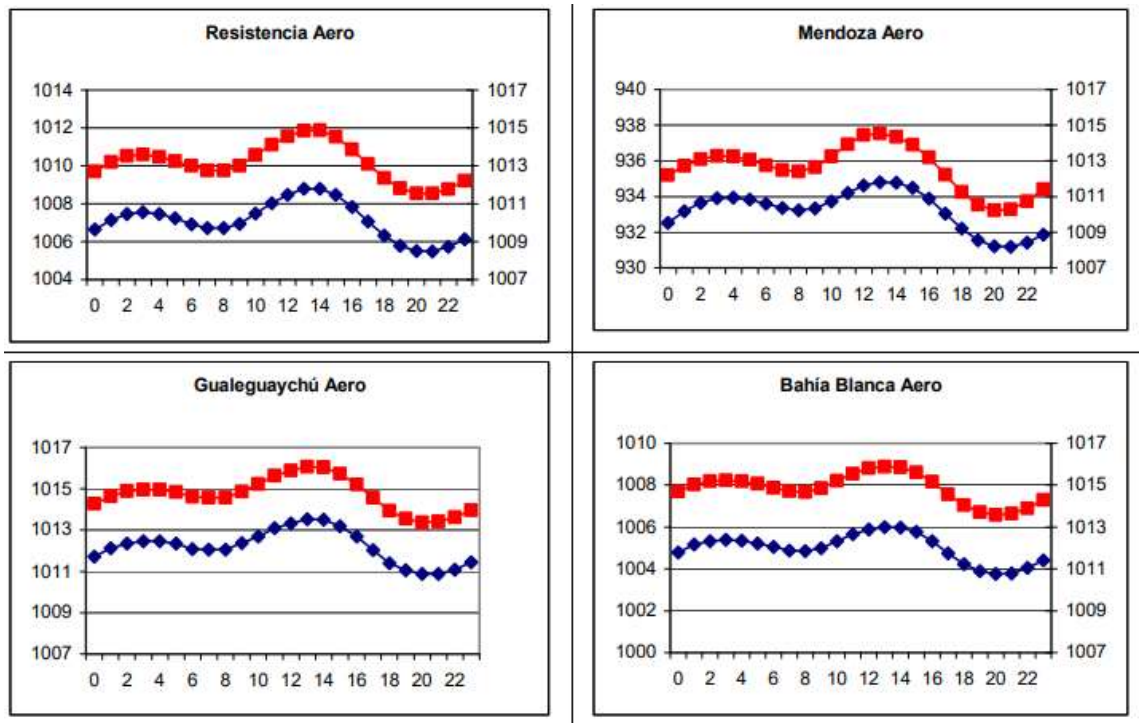


Figura 24: Presión en mb (eje Y) en función de la hora local en formato 24h (eje X) para diferentes estaciones meteorológicas en Argentina[20].

[20] Gráficas extraídas del artículo de C. C. Possia N, Cerne B, «Análisis preliminar de la tendencia de presión en Argentina», *Dep. Ciencias la Atmósfera y los Océanos, Fac. Ciencias Exactas y Nat. UBA*, n.º 1687, 2004.

De las gráficas de la Figura 24, se aprecian que todas las estaciones sufren para el mismo día, unos máximos de presión alrededor de las 03:00 y 14:00 horas y unos mínimos a las 07:00 y 20:00 aproximadamente.

Estas gráficas, sin embargo, están referidas a una región de la Tierra con valores similares de latitud. Para ver cómo responden los datos de presión según la hora local para una zona más amplia del globo, hemos extraído la gráfica de la Figura 25, publicada en el artículo de F. Le Blancq [29], donde analizando datos tomados en tres puntos diferentes de la Tierra, (Goa, Maldivas y Jersey), el autor nos muestra que la presión sufre mayores variaciones por efecto de la hora local en latitudes cercanas al ecuador:

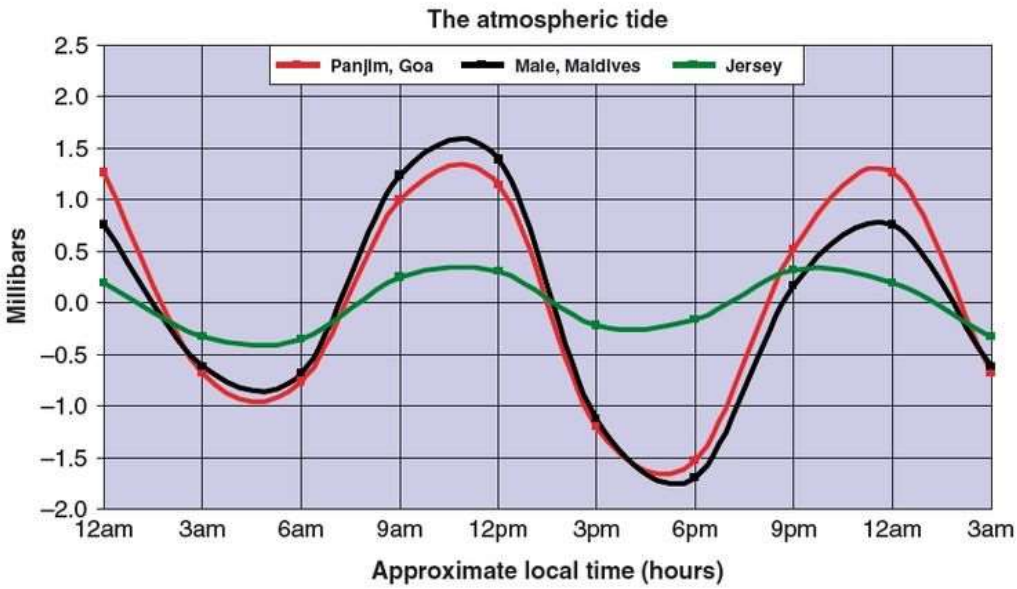


Figura 25: Mareas atmosféricas para regiones de diferente latitud[21].

Las latitudes elegidas y los periodos de tiempo tomados para la gráfica de la Figura 25 fueron: Panjim (Goa, India) en latitud 15°N [22], Malé (Islas Maldivas) en latitud 04°N [23] y Jersey (Islas del Canal) en latitud 49°N [24].

Para las tres latitudes elegidas, observamos tanto máximos como mínimos de presión en el mismo intervalo de hora local. Por tanto, teniendo una estimación de nuestra posición, y conociendo la hora, podríamos realizar una estimación de la variación de presión que influirá directamente en el índice de refracción, como se explicó en el apartado 4.7.4 y al igual que en el apartado anterior, podríamos utilizar esta variabilidad para analizar el error en la posición.

[21] Gráfica extraída del artículo de Frank Le Blancq, «*Diurnal pressure variation: the atmospheric tide*»
[22]Datos medios tomados para 12 meses entre los años 2007 y 2008.
[23]Datos medios tomados para un 80% de días del año 2008.
[24]Datos medios tomados en el periodo de 1971 a 2010.

5 Resultados

El problema principal parte de la siguiente hipótesis: Imaginemos un barco situado en el medio del mar. Este buque desea obtener su posición geográfica sin hacer uso de los sistemas clásicos dependientes de GPS, por lo que decide obtener sus coordenadas a través de la observación de las estrellas. Dicho buque decide instalar un sistema que le permita realizar una fotografía con resolución suficiente de los astros para un momento dado. Esta cámara, para simplificar, se ha decidido que apunte siempre hacia el cénit.

Mediante una serie de cálculos, el buque finalmente obtiene la posición geográfica de su plataforma (latitud y longitud). La pregunta es: ¿Son fiables estos datos obtenidos? Pues bien, debemos tener en cuenta que este buque emplea para situarse mapas o cartas de navegación, que en la gran mayoría de casos son una proyección de tipo Mercator del modelo de elipsoide WGS84, pero esto no es la forma de la Tierra real, sino una aproximación de ella (un elipsoide), lo que produce un pequeño error de cálculo. En este TFM, estudiamos en qué medida se encuentra este error, lo cuantificaremos e intentaremos obtener conclusiones al respecto.

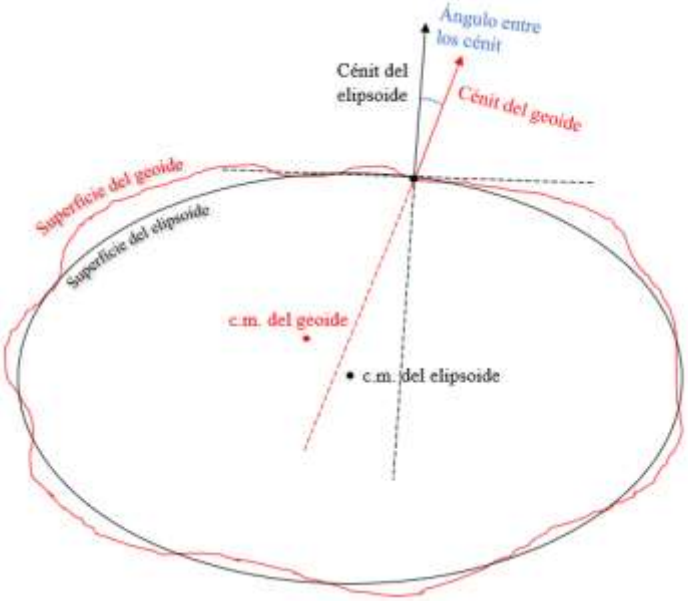


Figura 26: Geoide (rojo) y elipsoide (negro). Los cénit de ambas figuras no necesariamente pasan por sus respectivos centros de masas (elaboración propia).

En la Figura 26 se ha exagerado las proporciones para una mejor visualización. Las diferencias entre el elipsoide y el geoide, en general, no suelen superar los 100 metros [11].

Para el problema tenemos en cuenta dos factores que nos afectarán a la hora de realizar los cálculos. En primer lugar, la cámara apunta al cénit, pero debido a las irregularidades en la superficie terrestre, este cénit va a depender del modelo de la Tierra elegido (elipsoide, geoide, etc.). Cuanto más real sea la forma de la Tierra que elijamos, menor será el error acumulado. También dependerá de la posición geográfica donde se encuentre

el observador (principalmente afecta la latitud y en menor medida la longitud), ya que en unos lugares el cénit se desvía en mayor medida que en otros.

En segundo lugar, tenemos en cuenta el desvío producido por la refracción de la atmósfera sobre los astros. La refracción atmosférica desviará los astros hacia el cénit, dándole a los astros unas coordenadas de declinación y ascensión recta aparentes diferentes de las que veríamos en ausencia de atmósfera.

5.1 Diferencia en la geolocalización entre dos modelos terrestres diferentes

Comencemos calculando el error obtenido en la geolocalización solamente teniendo en cuenta el modelo de la Tierra empleado, ya sea un elipsoide de revolución (Figura 27) u otro modelo terrestre mucho más completo y exacto como un geoide (Figura 28)

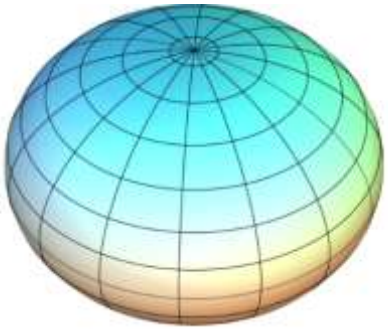


Figura 27: Elipsoide oblato genérico[25].

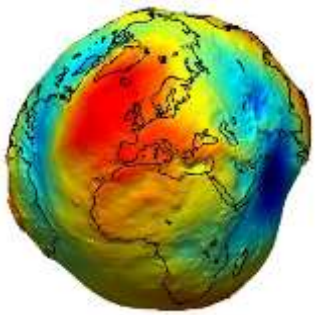


Figura 28: Geoide genérico (proporciones de las irregularidades en factor de escala 10000 para una mejor visualización)[26].

[25] Imagen extraída de la página web:
https://gisgeography.com/ellipsoid-oblate-spheroid-earth/

[26] Imagen extraída de la página web:
https://www.esa.int/ESA_Multimedia/Images/2008/05/Earth_s_geoid_as_seen_by_GOCE.

En este apartado pretendemos obtener el error en la geolocalización de un observador, utilizando dos modelos diferentes de la Tierra, conocidas las coordenadas celestes de su cénit. Estudiaremos las diferencias en los cálculos de ambos modelos y trazaremos un mapa de error para visualizar en qué parte del globo terrestre las diferencias medidas son mayores. Para el modelo más preciso de geoide hemos elegido el modelo EGM2008, actualización del conocido modelo WGS84.

Todos los modelos de geoide utilizados los hemos descargado de la web ICGEM (*International Center for Global Earth Models*)[27]. Para el modelo de elipsoide, decidimos crearlo nosotros mismos haciendo uso de los coeficientes de armónicos esféricos. Comencemos creando un modelo de elipsoide WGS72. Para ello, visualizamos los coeficientes de armónicos esféricos que contiene el archivo WGS72.gfc de la librería ICGEM[28].

```
13  product_type                gravity_field
14  modelname                   WGS72
15  earth_gravity_constant      0.3986005E+15
16  radius                      0.6378135E+07
17  max_degree                  28
18  errors                      no
19
20
21  key     L     M        C              S
22  end_of_head ================================
23  gfc     0     0     1.0000e+00     0.0000e+00
24  gfc     2     0  -484.1605e-06     0.0000e-00
25  gfc     2     2     2.4423e-06    -1.4036e-06
26  gfc     3     0     9.5950e-07      .0000e+00
27  gfc     3     1     2.0536e-06     2.6703e-07
28  gfc     3     2     9.1332e-07    -6.4571e-07
29  gfc     3     3     7.0512e-07     1.4064e-06
30  gfc     4     0     5.5199e-07      .0000e+00
31  gfc     4     1    -5.3136e-07    -4.8052e-07
32  gfc     4     2     3.4388e-07     6.5123e-07
33  gfc     4     3     9.8211e-07    -1.9836e-07
34  gfc     4     4    -1.9235e-07     3.1713e-07
35  gfc     5     0     6.5875e-08      .0000e+00
```

Figura 29: Coeficientes armónicos para la elaboración de un geoide WGS72.

Este modelo de geoide WGS72 contiene 271 datos de coeficientes armónicos para la elaboración del geoide que funcionan según la ecuación de armónicos esféricos disponible en la página web[29]:

[27] Modelos disponibles en la página web: *http://icgem.gfz-potsdam.de/tom_longtime*

[28] Librería ICGEM disponible en la página web: *http://icgem.gfz-potsdam.de/tom_longtime*

[29] *https://en.wikipedia.org/wiki/Spherical_harmonics*

$$f(\lambda,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} f_l^m \, Y_l^m(\lambda,\varphi)$$

Pero, ¿cómo utilizar estos datos para formar un elipsoide WGS72? Pues bien, si eliminamos todos los términos o filas excepto el (0, 0) y el (2, 0), correspondientes a las columnas (L, M), obtenemos un modelo de elipsoide simétrico en los polos e independiente de la longitud:

```
12
13 product_type                gravity_field
14 modelname                   WGS72-elipsoide_solo
15 earth_gravity_constant      0.3986005E+15
16 radius                      0.6378135E+07
17 max_degree                  28
18 errors                      no
19
20
21 key    L    M        C              S
22 end_of_head ================================
23 gfc    0    0     1.0000e+00     0.0000e+00
24 gfc    2    0  -484.1605e-06     0.0000e-00
25
```

Figura 30: Coeficientes armónicos para la elaboración de un elipsoide WGS72. Hemos eliminado todas las filas excepto las correspondientes a (L, M): (0,0) y (2,0).

¿Por qué hemos elegido estos coeficientes para la representación del elipsoide? En la Figura 31 se muestran los primeros niveles de coeficientes armónicos. El primer coeficiente es el (0,0), la segunda columna corresponde a los coeficientes (1,-1), (1,0) y (1,1) y en la tercera columna, encontramos un elipsoide simétrico en los polos e independiente de la longitud, equivalente al nivel (2,0) (recuadro de color rojo):

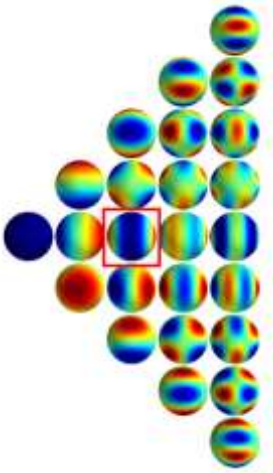


Figura 31: Visualización del coeficiente armónico (2,0) (elipsoide regular y simétrico en los polos). Imagen extraída de la página web[30].

[30] *http://www.csc.kth.se/~fpokorny/codeanddata/harmonicregression.html*

En la página web de ICGEM[31] podemos visualizar los modelos 3D según los coeficientes de los armónicos esféricos elegidos:

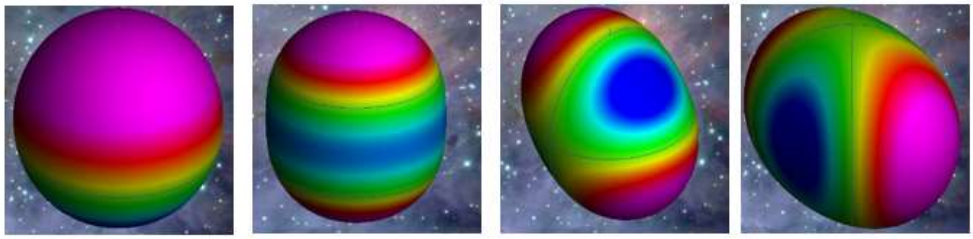


Figura *A* *Figura B* *Figura C* *Figura D*

- Figura A: Coeficiente l=1, m=0
- Figura B: Coeficiente l=2, m=0
- Figura C: Coeficiente l=2, m=1
- Figura D: Coeficiente l=2, m=2

Una vez elegido los archivos necesarios de la librería ICGEM (En este ejemplo hemos elegido los modelos geoide WGS72 y elipsoide WGS72), hemos creado un código en Python, para obtener el ángulo de separación entre el cénit de estos dos modelos. De aquí obtenemos una matriz de 59x117 celdas, que nos indica el ángulo de error en arcosegundos para toda la superficie terrestre, para estos dos modelos elegidos:

	0	1	2	3	4	5
1	2.97448	2.986	2.99688	3.0072	3.01706	3.02655
2	3.69036	3.69408	3.70213	3.71494	3.73264	3.75511
3	4.45858	4.48108	4.525	4.58702	4.66338	4.75035
4	4.7271	4.88699	5.06662	5.24982	5.42465	5.58374
5	4.74036	5.15478	5.51449	5.80067	6.00419	6.12394
6	5.12214	5.67684	6.09314	6.36583	6.49204	6.47072
7	5.51704	5.98487	6.31014	6.50911	6.58067	6.50262
8	5.22648	5.4721	5.63444	5.79444	5.96142	6.05519

Figura 32: Porción de 8x6 celdas tomada sobre la matriz de 59x117 celdas calculada. Los datos indican la desviación angular en arcosegundos, para varios puntos de la Tierra, entre el cénit de un modelo de geoide WGS72 y el cénit de un modelo de elipsoide WGS72.

La matriz obtenida en realidad contiene 59x117 celdas. Esto significa que, si dividimos la superficie terrestre 59 partes en latitud y 117 partes en longitud, obtendríamos estos valores de error en arcosegundos, comenzando a leer los datos en φ=90ºN, λ=0ºE. El error significa en qué medida se desvía la plomada en la superficie terrestre. Para una mejor

[31] Visualización de modelos 3D del geoide terrestre disponible en la página web de ICGEM: *http://icgem.gfz-potsdam.de/vis3d/tutorial*.

comprensión, hemos creado un código Python para representar estas celdas sobre un mapa. Para ello hemos escrito un código que transforma la matriz obtenida a formato netCDF4. Este formato lo hemos elegido por ser el utilizado por el programa de mapas de la NASA, Panoply.

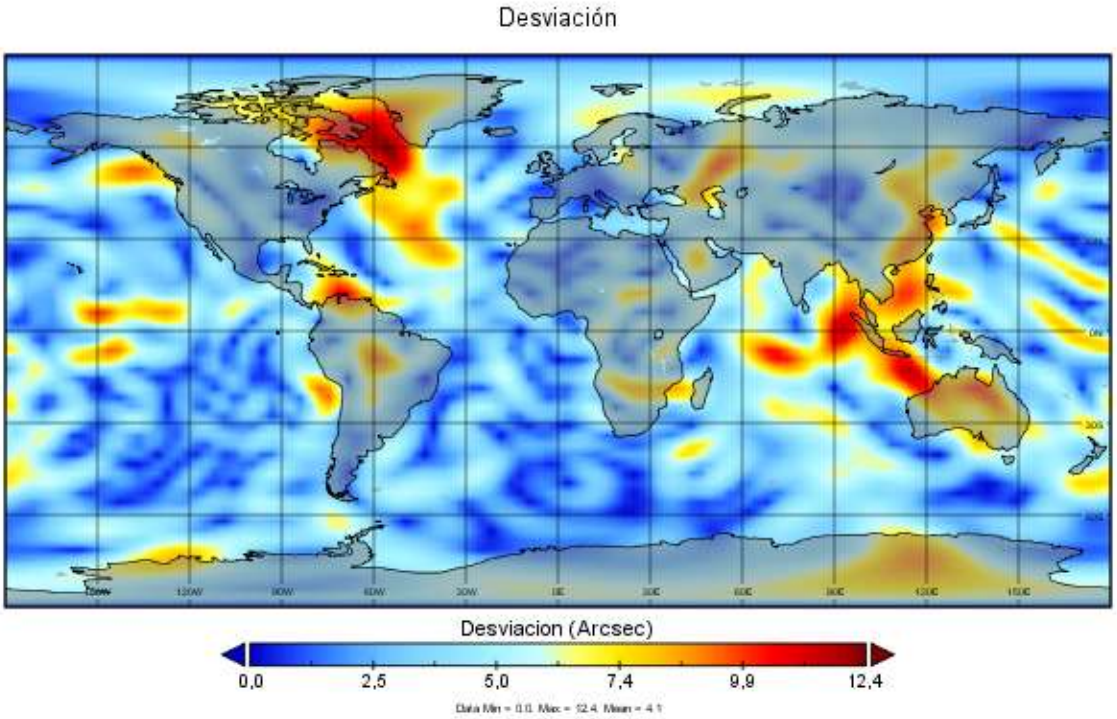


Figura 33: Representación de la desviación del cénit entre el modelo de elipsoide WGS72 y el modelo de geoide WGS72, en arcosegundos.

En esta gráfica, observamos unas desviaciones máximas en la provincia canadiense de Terranova y Labrador, en el noreste del país norteamericano, siendo estas desviaciones de 12.2 arcosegundos y por otra parte unas desviaciones importantes al sur y al oeste de la isla de Java, Indonesia, con unos desvíos calculados de 10 arcosegundos.

Según nuestros cálculos, entre el modelo de elipsoide WGS72 y el modelo de geoide WGS72 nos encontramos con unos errores máximos de 12 arcosegundos, es decir, 360 metros[32] en el noreste de Canadá y de 300 metros al noroeste de Australia. Observamos errores menores, pero aún importantes, en la región del Caribe sudamericano.

En este TFM hemos elegido el programa Panoply para la visualización gráfica de los mapas, pero también existen otras opciones. Si transformamos el archivo generado a formato *kmz*, podemos visualizar estos mismos mapas de manera interactiva en Google Earth:

[32] Utilizamos la conversión "1 arcosegundo de desviación = 30 metros de error", calculado en la "Demostración 2" del punto 9.2

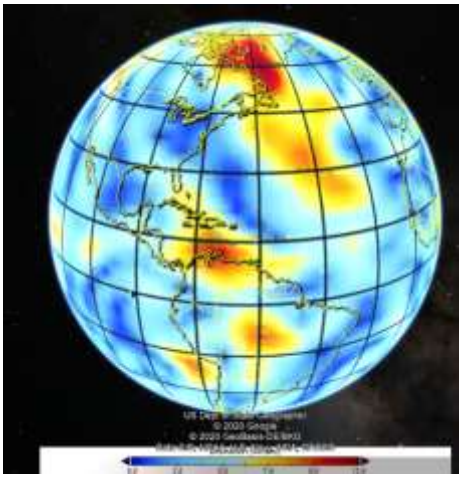


Figura 34: Representación de las desviaciones cenitales en segundos de arco de ambos modelos WGS72 en Google Earth.

De esta manera, hemos repetido estos mismos cálculos para varios modelos diferentes, realizando las siguientes comparaciones:

1. Geoide EGM2008 – Geoide WGS66.
2. Geoide EGM2008 – Geoide WGS72.
3. Geoide EGM2008 – Elipsoide EGM2008.

Hemos elegido el modelo de geoide EGM2008 como el modelo terrestre más preciso que podemos cargar en Python. Hemos comparado este modelo con modelos más antiguos y simples para comprobar si podemos utilizar estos modelos simples para nuestras observaciones o si, por el contrario, nos producen un alto error:

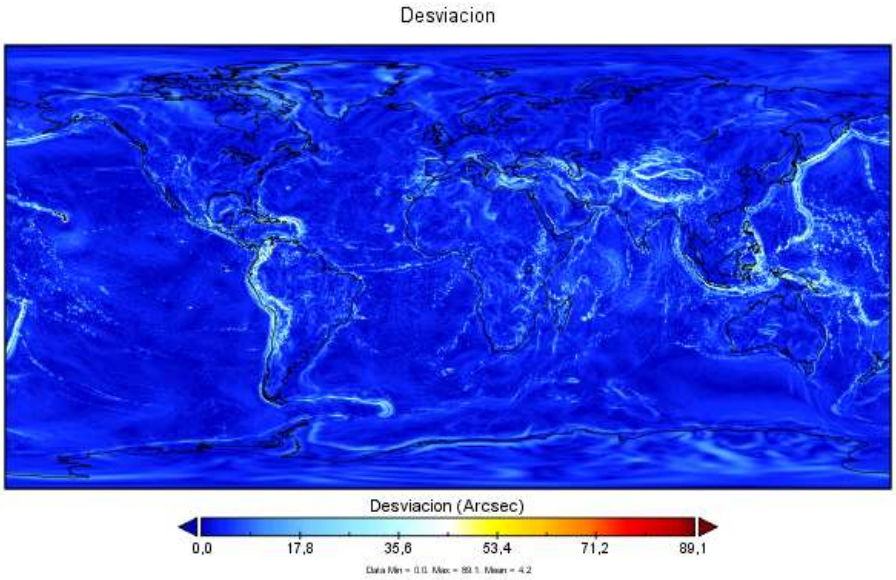


Figura 35: Representación de la desviación cenital entre un modelo de geoide EGM2008 y un modelo de geoide WGS66.

En la Figura 35 representamos la desviación obtenida utilizando un modelo refinado (EGM2008) respecto a un antiguo modelo de geoide (WGS66). Como se aprecia en la escala inferior del mapa, las diferencias son bajas en la mayor parte de la superficie terrestre, pero con algunas desviaciones importantes de unos 40 arcosegundos en algunas zonas delimitadas, lo que equivaldría a más de 1 km de error. Curiosamente las mayores desviaciones se producen encima de los límites de algunas de las placas tectónicas pudiendo apreciarse relativamente bien el Cinturón o Anillo de Fuego del Pacífico (ver Figura 36), la línea más sísmicamente activa del mundo, y también la Cordillera del Himalaya que separa la placa tectónica de la India de la Euroasiática:

Figura 36: Cinturón o anillo de fuego del Pacífico[33].

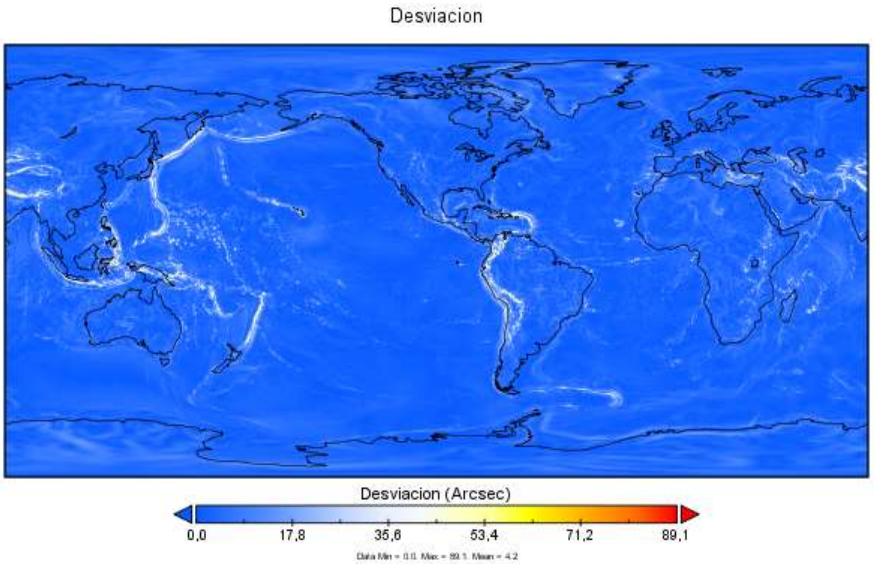


Figura 37: Misma representación que la Figura 35, esta vez centrada en longitud 100ºW para una mejor comparación visual con la Figura 36.

[33] Imagen extraída de la página web: *https://sites.ipleiria.pt/seismicknowledge/cinturon-de-fuego-del-pacifico/*

Se observa claramente las similitudes entre la Figura 36 y la Figura 37, pero ¿por qué sucede esto? ¿Por qué unas anomalías del modelo terrestre nos influyen en nuestras observaciones astronómicas? Y, por otra parte, ¿por qué no se observa con la misma nitidez el Cinturón de Fuego en la región norteamericana? La explicación, sin entrar en demasiado detalle, es que las placas tectónicas no se mueven todas por igual. Existen tres tipos bien diferenciados de movimientos de placas tectónicas: movimientos divergentes (las placas se separan), convergentes (las placas colisionan entre sí) y transformantes (las placas se deslizan).

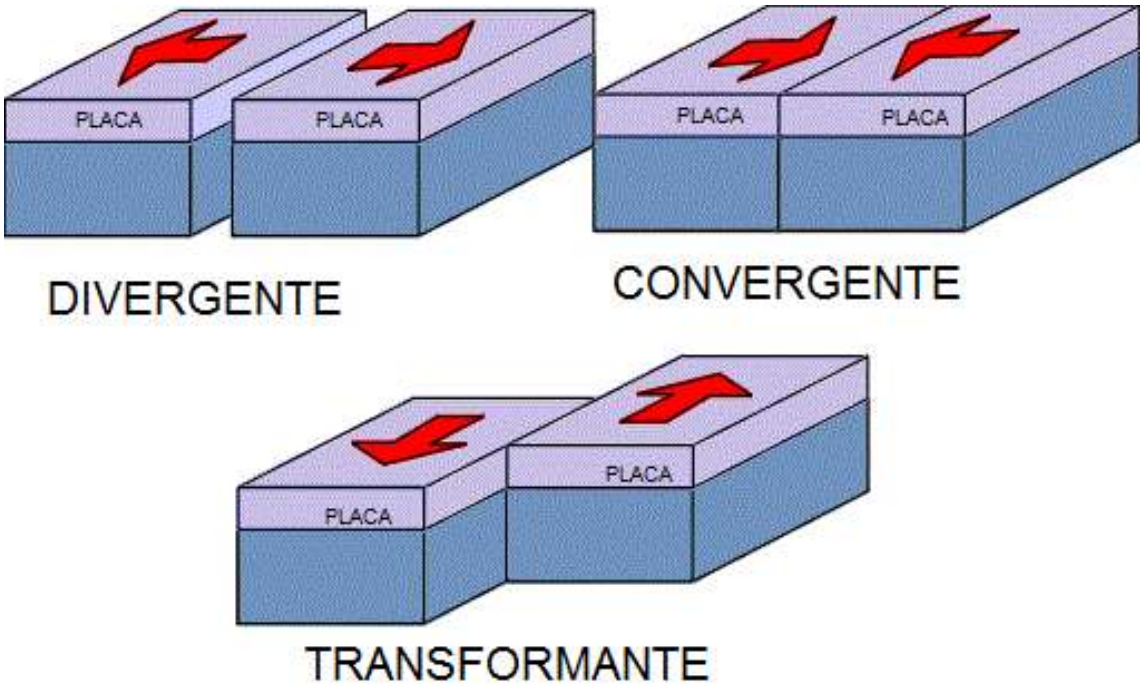


Figura 38: Movimientos de placas tectónicas[34].

La placa en la región norteamericana es de tipo transformante, como mostramos en la Figura 39, donde al tener este tipo de movimiento, no se crea una diferencia de densidades en la región y por ello no existirá una diferencia gravitacional remarcable que altere la dirección de nuestro cénit, como sí sucede en las zonas donde más se visualiza la desviación. Las desviaciones más visibles se encuentran sobre los límites de las placas con movimientos convergentes. De estas gráficas obtenidas deducimos que la Teoría de la Tectónica de Placas está estrechamente relacionada con las observaciones astronómicas.

[34] Imagen extraída de la página web: *https://www.researchgate.net/figure/Figura-31-Esquema-general-de-movimiento-entre-placas-tectonicas_fig2_329717582*

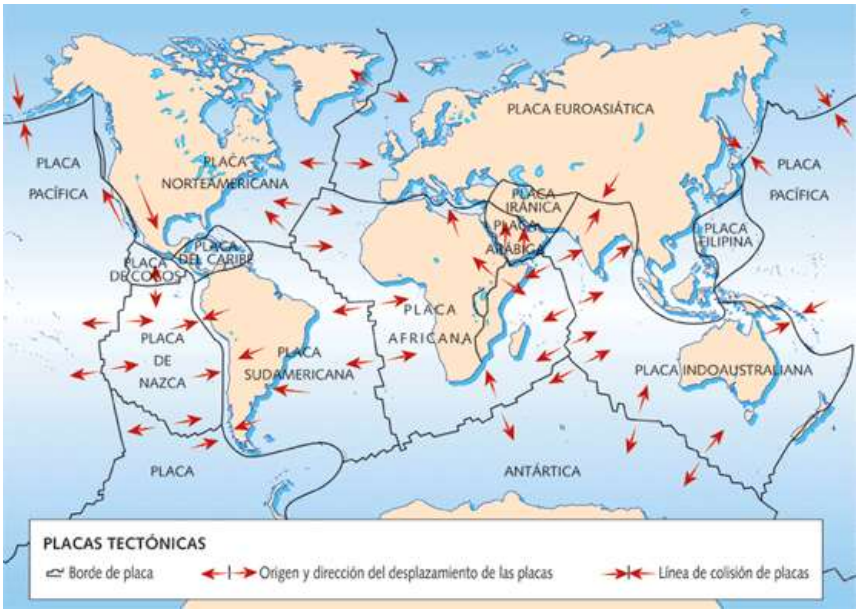


Figura 39: Movimiento de placas tectónicas[35].

Además, como curiosidad, ampliando sobre el sur de la Península Ibérica observamos una gran desviación en la misma posición donde tuvo lugar el famoso Terremoto de Lisboa de 1755, cuyo posterior maremoto arrasó tierras portuguesas, norte de África, Huelva y Cádiz (ver Figura 40 y Figura 41) [32].

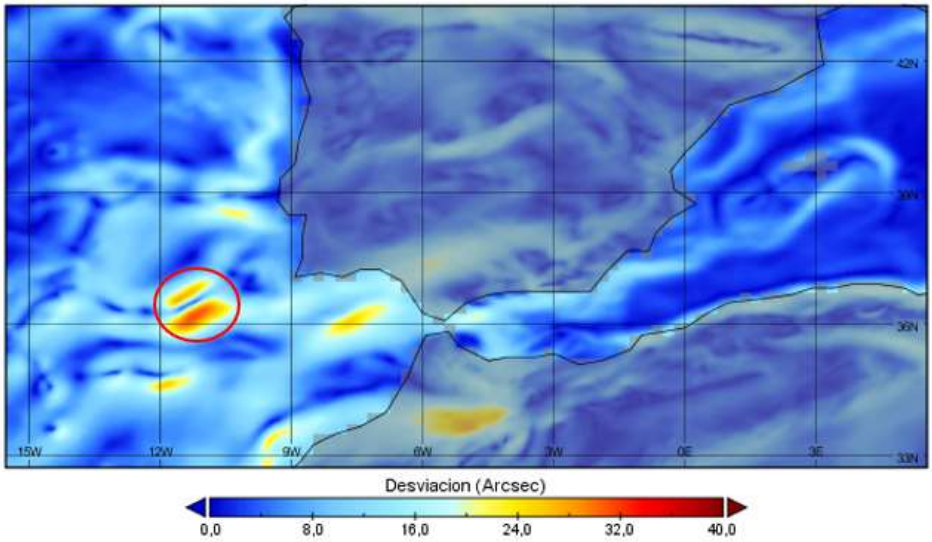


Figura 40: Gran desviación cenital de 33 arcosegundos en posición 36.3ºN 11ºW (círculo rojo) para un mapa escalado hasta 40 arcosegundos.

[35] Imagen extraída de la página web: *http://jcdonceld.blogspot.com/2010/11/las-placas-tectonicas-y-el-relieve.html*

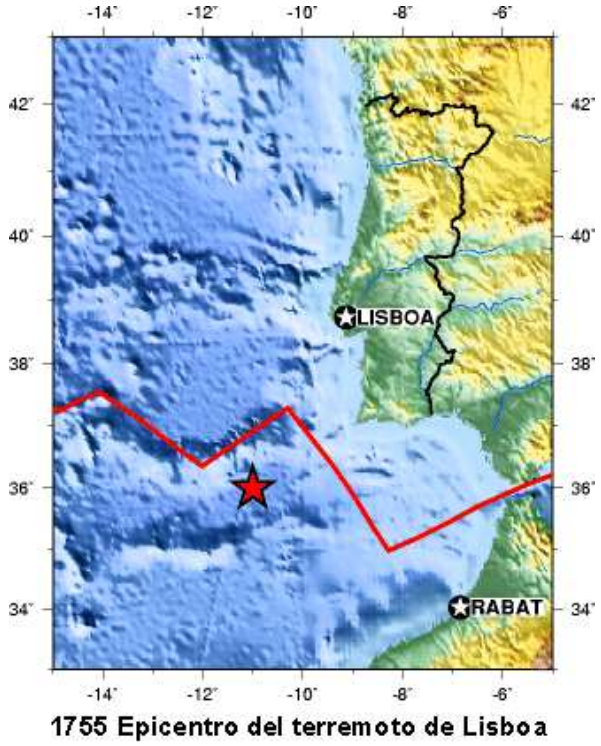


Figura 41: Posición del epicentro del Terremoto de Lisboa de 1755, coincidente con la anomalía calculada en la Figura 40[36].

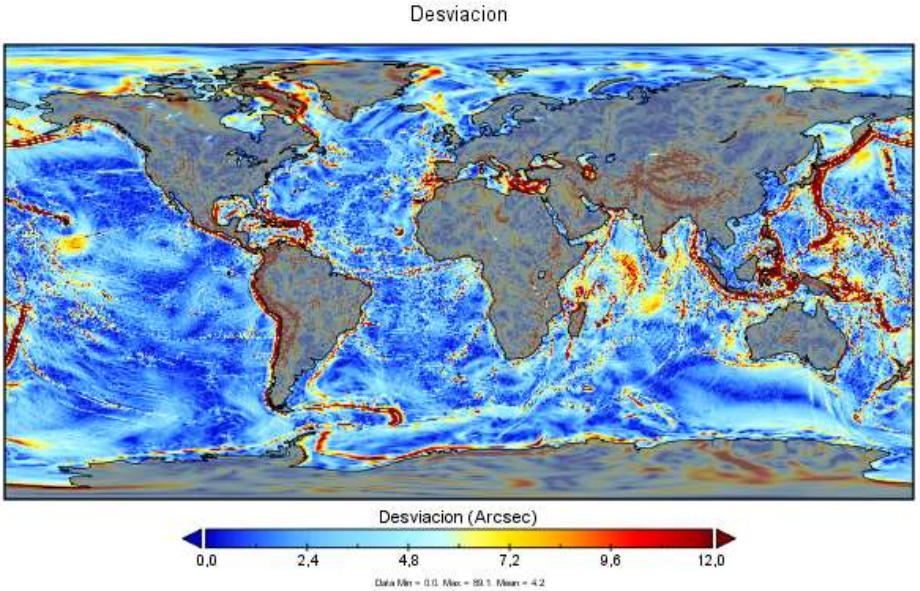


Figura 42: Geoide EGM2008 vs geoide WGS66 en escala de 0 a 12 arcosegundos.

[36] Imagen extraída del artículo de Wikipedia *"Terremoto de Lisboa de 1755"*. Disponible en *https://es.wikipedia.org/wiki/Terremoto_de_Lisboa_de_1755*

Escalando el mapa entre 0 y 12 arcosegundos de desviación, observamos mejor en la imagen obtenida que el mapa es muy irregular en toda su superficie, con desvíos pequeños de 0 a 5 arcosegundos en algunas zonas, pero con desvíos muy importantes en varios lugares de la superficie.

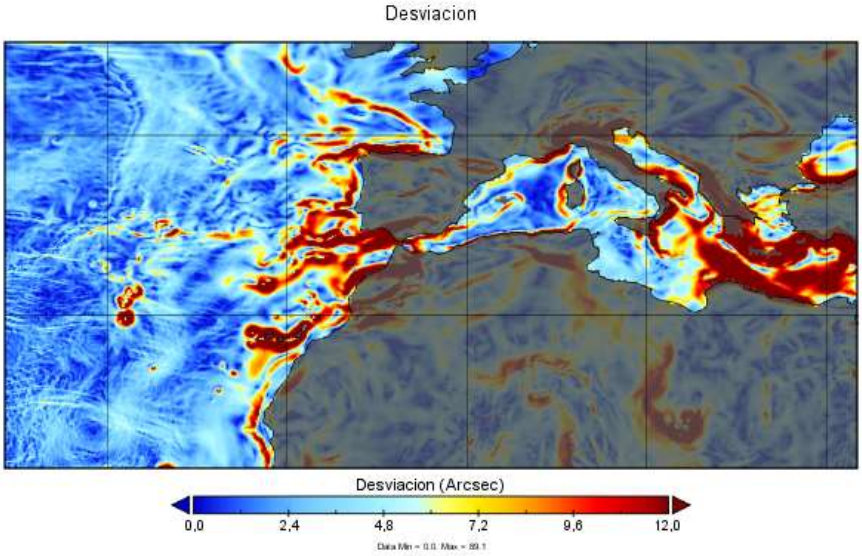


Figura 43: Desviaciones del geoide WGS66 en comparación al geoide EGM2008 sobre España y zona mediterránea escalado para desvíos máximos de 12 arcosegundos.

Ampliando la escala sobre el sur de Europa y la zona mediterránea y escalando para un máximo de 12 arcosegundos, apreciamos los evidentes errores del mapa simple (WGS66) respecto un modelo mucho más refinado (EGM2008). Para la región de mar alrededor de España, el error es mayor en la región atlántica que en la mediterránea.

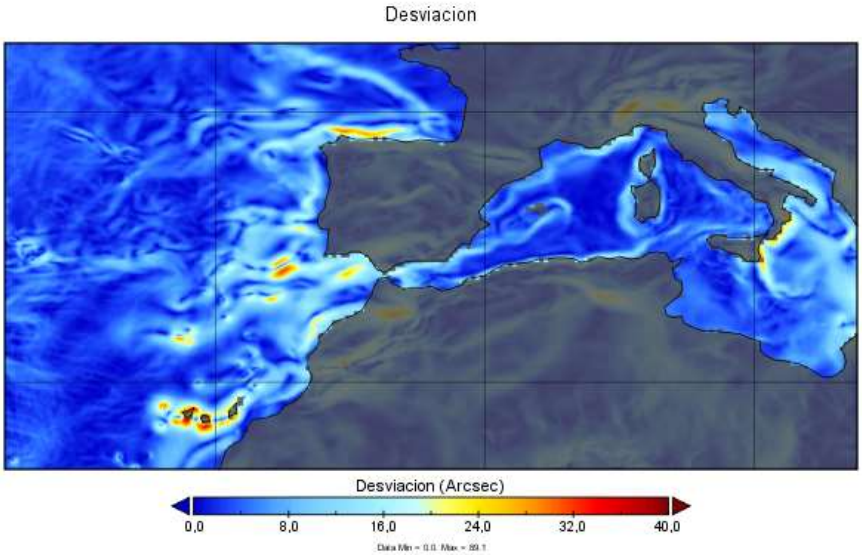


Figura 44: Desviaciones del geoide WGS66 en comparación al geoide EGM2008 sobre España y zona mediterránea escalado para desvíos máximos de 40 arcosegundos.

De esta gráfica deducimos que con la utilización de un modelo de geoide WGS66 obtendríamos unos grandes errores en distancias cercanas a la Península Ibérica e Islas Canarias, del orden de 28 arcosegundos en algunas zonas al suroeste del Golfo de Cádiz y de 26 arcosegundos en el norte de Galicia y también de Asturias. Los errores más significativos cerca de las costas españolas los encontramos del orden 35 arcosegundos en los alrededores de Gran Canaria y Tenerife.

Deducimos, por tanto, que el modelo de geoide WGS66 no es apropiado para la navegación astronómica cercana a costa, por los importantes errores que este modelo conlleva, siendo estos errores de 0 a 5 arcosegundos en la mayoría de lugares sobre los océanos (0 a 150 metros de error) pero errores de más de 1 kilómetro en distancias cercanas a las costas españolas y otros lugares del globo terrestre.

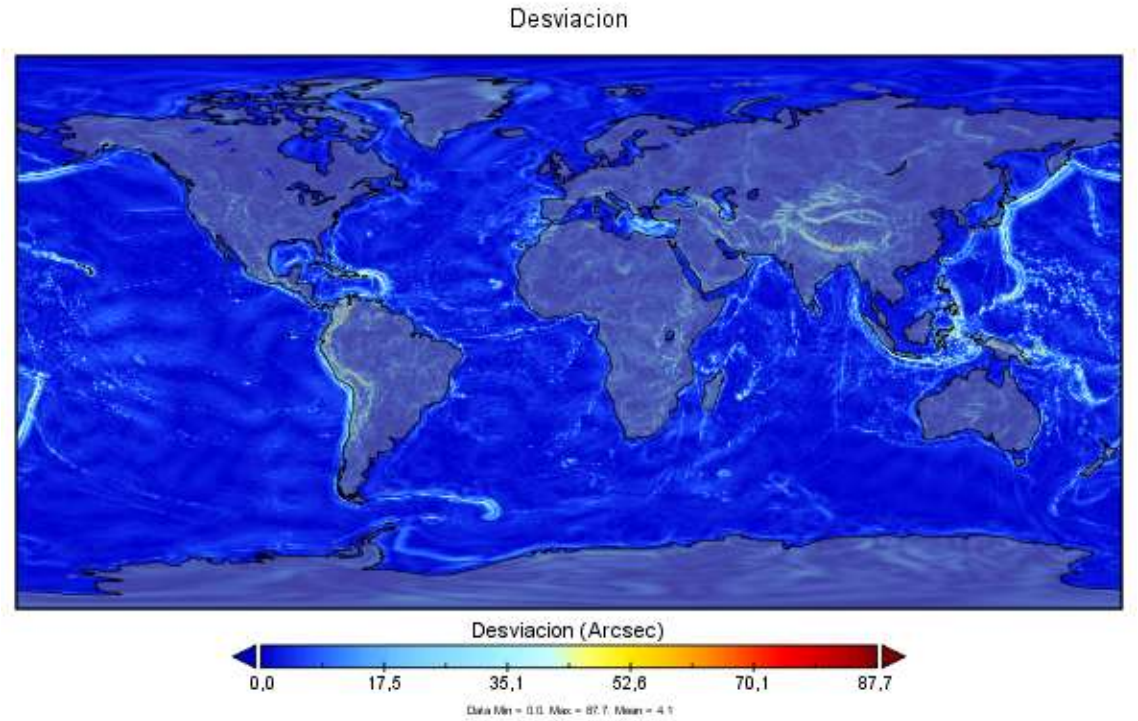


Figura 45: Geoide EGM2008 vs geoide WGS72.

Al realizar el mismo proceso con el modelo de geoide WGS72, obtenemos unos resultados similares pero esta vez con un error máximo de 87.7 arcosegundos, algo menos que los 89.1 arcosegundos de error máximo por parte de su predecesor modelo WGS66 (ver leyenda del mapa en color rojo). Esto quiere decir que con este modelo el error en la desviación cenital es ligeramente menor, por ser un modelo más moderno y mejorado.

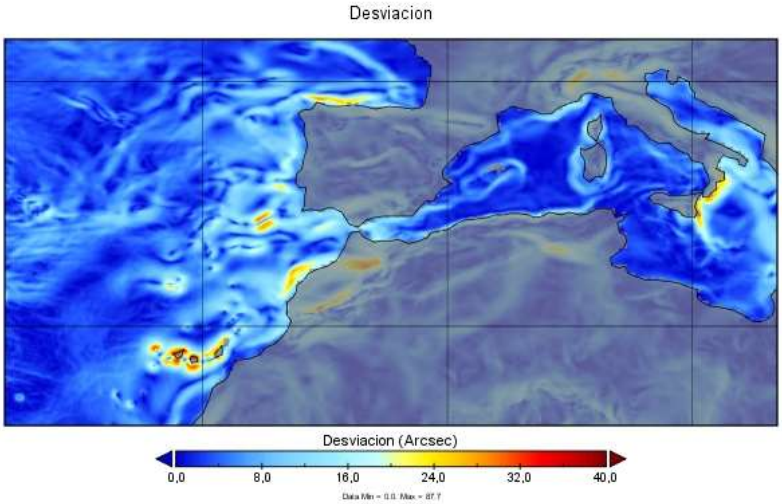


Figura 46: Desviaciones del geoide WGS72 en comparación al geoide EGM2008 sobre España y zona mediterránea escalado para desvíos máximos de 40 arcosegundos.

Los resultados obtenidos son similares a los anteriores. En los mares cercanos a la Península Ibérica, Islas Baleares e Islas Canarias, las desviaciones máximas son del orden de 35 arcosegundos, especialmente en las Islas Canarias.

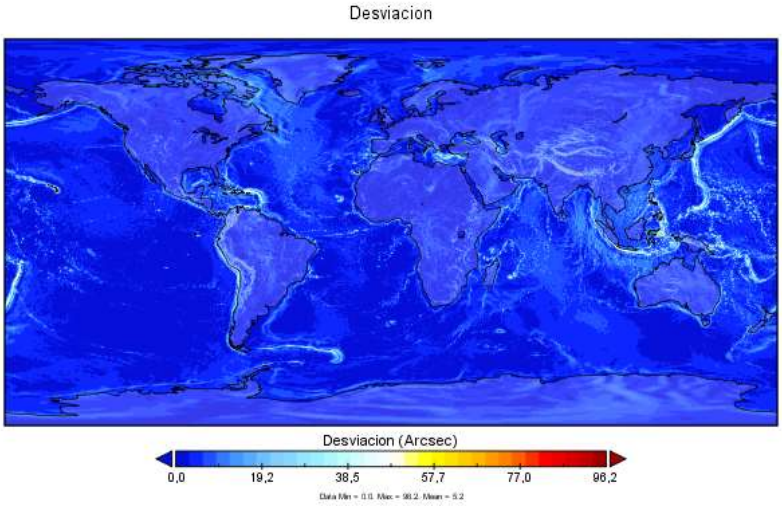


Figura 47 Geoide EGM2008 vs elipsoide EGM2008.

Cargando el modelo de elipsoide EGM2008 y observando el error producido respecto a al modelo de geoide EGM2008, observamos en la leyenda del mapa que el error asciende hasta 96.2, y por lo general, la desviación es mayor para la mayoría de puntos de la Tierra respecto a los mapas anteriores, siendo este modelo el que más error contiene de entre estos tres modelos elegidos. Esto se debe a que el modelo de geoide EGM2008 es un modelo que consideramos eficaz para nuestro estudio, con alto nivel de detalle, y el modelo de elipsoide EGM2008 creado por nosotros no deja de ser una importante simplificación de este.

Por otra parte, ya hemos deducido que la desviación cenital es importante sobre los límites de algunas placas tectónicas, pero ¿Ocurre lo mismo sobre las fosas oceánicas? Para saberlo, hemos analizado la desviación sobre la fosa de las Marianas (142º12'E 11º21'N)[37]:

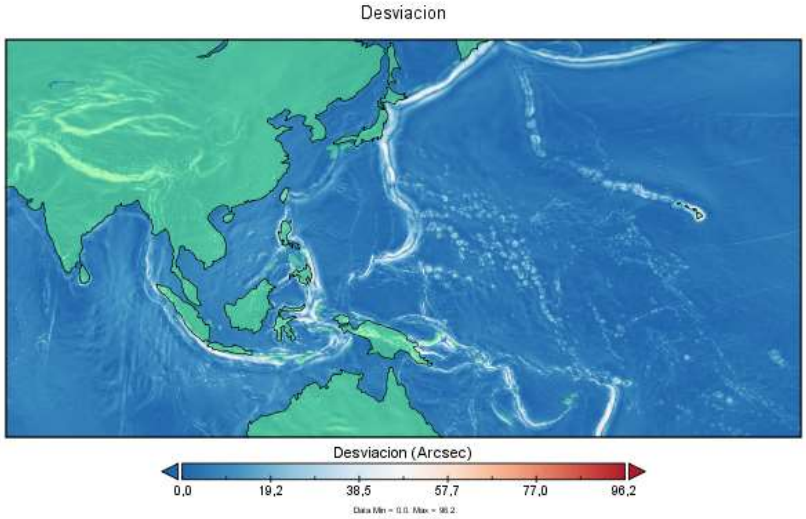


Figura 48: Desviaciones del elipsoide EGM2008 en comparación al geoide EGM2008 para la región centrada sobre el Mar de Filipinas. Ubicación de la Fosa de las Marianas marcada en círculo rojo.

Observamos que el error máximo sobre la fosa, asciende hasta 57.5 arcosegundos o 1725 metros, para este mapa. Los valores obtenidos para nuestros mapas estudiados son:

Modelos comparados	**Error máximo sobre la fosa de las Marianas**
Geoide EGM2008. Geoide WGS66.	63.4" / 1902 m
Geoide EGM2008. Geoide WGS72.	61.1" / 1833 m
Geoide EGM2008. Elipsoide EGM2008.	57.5" / 1725 m

Figura 49: Desviaciones cenitales sobre la Fosa de las Marianas para nuestros modelos terrestres estudiados.

[37] Coordenadas de la Fosa de las Marianas o *Mariana Trench* en la página web: *https://www.marianatrench.com/mariana_trench-oceanography.htm#:~:text=The%20coordinates%20for%20the%20Mariana,km%20(43%20miles)%20wide.*

Observamos que, en todos los casos, la desviación sobre esta zona es un valor muy alto, por lo que deducimos que además de sobre los límites de las placas tectónicas, los errores también son importantes sobre las fosas oceánicas.

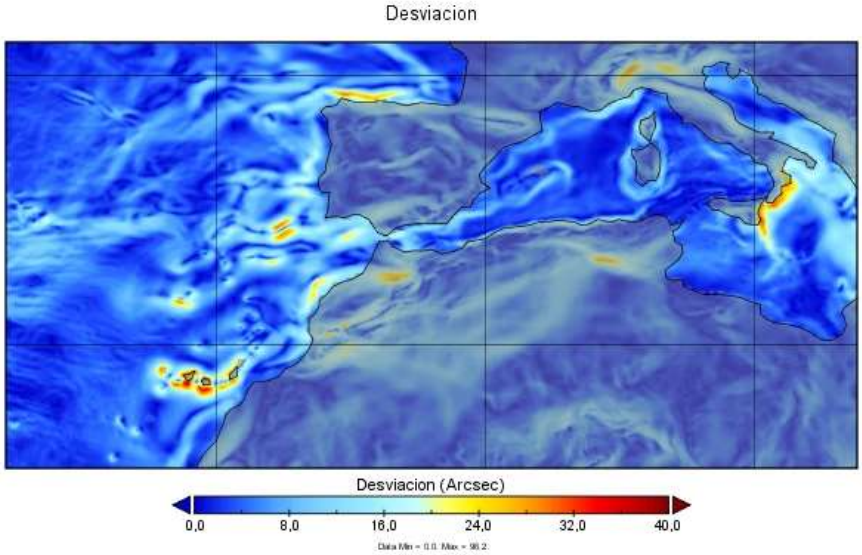


Figura 50: Desviaciones del elipsoide EGM2008 en comparación al geoide EGM2008 sobre España y zona mediterránea escalado para desvíos máximos de 40 arcosegundos.

De este último modelo de elipsoide EGM2008 observamos que los errores en la desviación observados para la Península Ibérica, Baleares e Islas Canarias son similares respecto a los anteriores modelos mencionados, del orden de 28 arcosegundos tanto en la zona canaria como del suroeste peninsular.

Modelos comparados.	**Error máximo entre los dos modelos (toda la Tierra)**	**Regiones oceánicas con mayor error observado.**	**Regiones oceánicas con mayor error alrededor de España.**	**Error observado.**
Geoide WGS72. Elipsoide WGS72.	12.4” / 372 m	Terranova (Canadá), norte de Venezuela y Colombia, oeste de la Isla de Sumatra (Indonesia), sur de la Isla de Java (Indonesia)	Suroeste de la Península Ibérica.	4.4” / 132 m
Geoide EGM2008. Geoide WGS66.	89.1” / 2673 m	Cinturón de fuego del Pacífico (excepto Norteamérica), Mediterráneo Oriental, Islas Antillas, Fosa de las Marianas	Suroeste de la Península Ibérica.	33” / 990 m
			Gran Canaria.	35.9” / 1077 m
Geoide EGM2008. Geoide WGS72.	87.7” / 2631 m	Cinturón de fuego del Pacífico (excepto Norteamérica), Mediterráneo Oriental, Islas Antillas, Fosa de las Marianas	Suroeste de la Península Ibérica.	28” / 840 m
			Gran Canaria.	32.2” / 966 m
Geoide EGM2008. Elipsoide EGM2008.	96.2” / 2886 m	Cinturón de fuego del Pacífico (excepto Norteamérica), Mediterráneo Oriental, Islas Antillas, Fosa de las Marianas.	Suroeste de la Península Ibérica.	28.2” / 846 m
			Gran Canaria.	28.6” / 858 m

Tabla 6: Resumen de los modelos terrestres estudiados.

5.2 Mareas de equilibrio:

Para este apartado del TFM, vamos a tratar de calcular el efecto de las mareas de equilibrio o mareas astronómicas. Nos referimos al efecto que produce la Luna y el Sol (especialmente la Luna) sobre la componente horizontal de la gravedad en la superficie terrestre. Calculamos el efecto horizontal de la gravedad por ser más determinante para la estimación del error en nuestra geolocalización. Con estos cálculos que a continuación introducimos, no trataremos de calcular el transporte de materia o agua en horizontal, sino simplemente el desvío del vector de gravedad local.

En los puntos 9.5, 9.6 y 9.7 hemos creado un código en Python para obtener y representar las componentes horizontales del vector de gravedad. Hemos utilizado como base el paquete Tide Gravity [38], el cual implementa exclusivamente la componente vertical según las fórmulas recogidas en el artículo de I. Longman [33]. Nosotros hemos modificado este paquete, para calcular la componente horizontal, en dirección Sur, dirección Oeste y la suma vectorial de ambas, que son las que más nos interesan para este estudio.

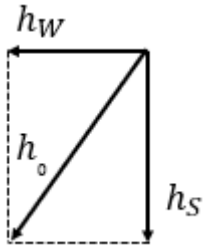


Figura 51: Componentes horizontales de mareas calculadas. (Elaboración propia).

Siendo la desviación horizontal h_0:

$$h_0 = \sqrt{h_S^2 + h_W^2}$$

Donde:

- $h_S =$ desviación horizontal por efectos de mareas en dirección Sur para valores positivos y Norte para negativos
- $h_W =$ desviación horizontal por efectos de mareas en dirección Oeste para valores positivos y Este para negativos
- $h_0 =$ módulo de la desviación horizontal por efectos de mareas que calculamos en este apartado

De este modo, analizamos el efecto en la desviación de la plomada originado por las mareas de equilibrio para diferentes puntos en concreto de la Tierra y para diferentes intervalos de tiempo. El código desarrollado proporciona estas componentes horizontales en unidades angulares (miliarcosegundos, m.a.s.), siguiendo el convenio normalmente

[38] Paquete Python TideGravity disponible en la página web: *https://pypi.org/project/tidegravity/*

empleado. Con este apartado, pretendemos conocer si este efecto es lo suficientemente importante en nuestra desviación como para tenerlo en cuenta o si, por el contrario, podemos despreciarlo.

A continuación, representamos diferentes valores de errores en la desviación horizontal de la plomada (h_0) en m.a.s., para diferentes valores de latitud, mismos valores de longitud, y para la misma fecha, 11 de octubre de 2020. El número de muestras de las gráficas son uno cada 60 segundos. Hemos elegido los puntos sobre el meridiano 165ºW, por ser uno de los meridianos con menos porción de tierra sobre el globo. Estos cinco puntos están separados 30º en latitud entre ellos. Los puntos elegidos son:

- Punto A: (φ=60ºN, λ =165ºW)
- Punto B: (φ=30ºN, λ =165ºW)
- Punto C: (φ=0ºN, λ =165ºW)
- Punto D: (φ=30ºS, λ =165ºW)
- Punto E: (φ=60ºS, λ =165ºW)

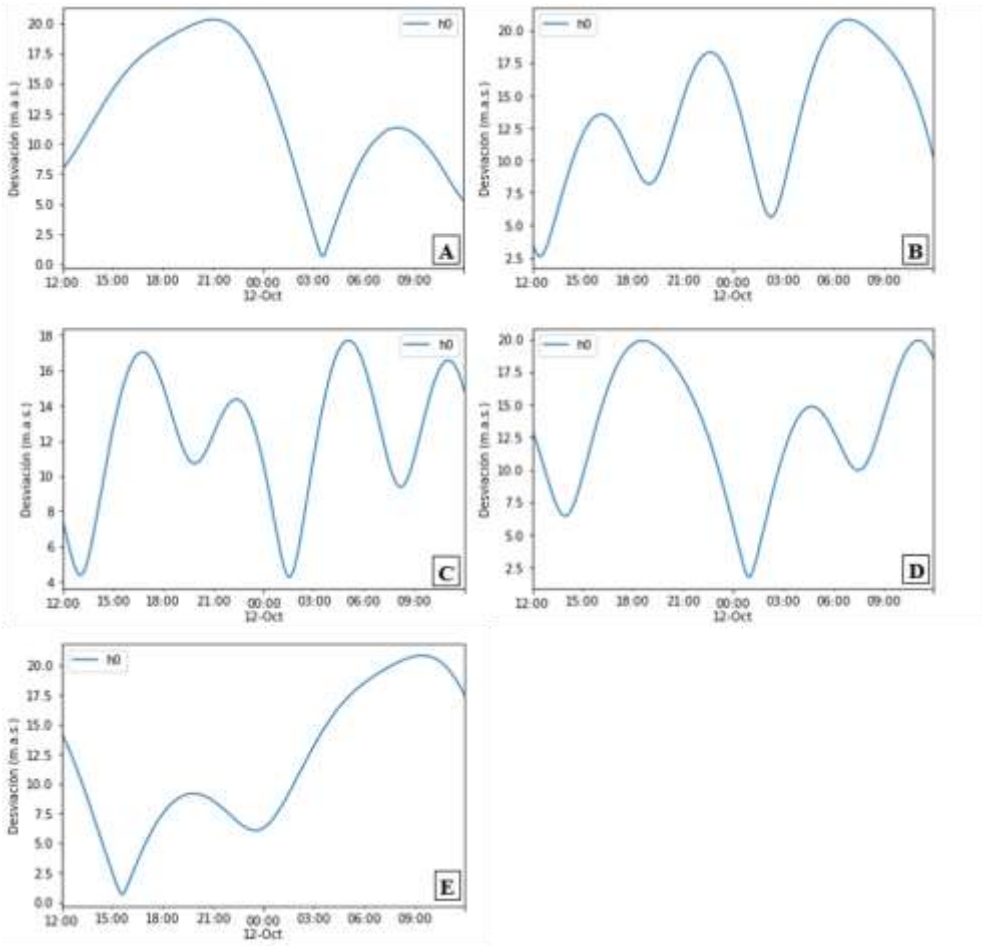


Figura 52: Desviaciones cenitales en miliarcosegundos por efecto de mareas de equilibrio para los puntos elegidos A-E en el periodo de 11/10/2020 a 12:00 UTC a 12/10/2020 a 12:00 UTC.

En las gráficas obtenidas, observamos que la máxima desviación de la plomada debido al efecto de las mareas de equilibrio en nuestros puntos elegidos y para un periodo de 24 horas en concreto, es de 20 m.a.s., equivalente a unos 60 cm de error. Para una mejor interpretación, visualicemos estos puntos elegidos sobre un mapa de mareas que hemos generado con el código Python que incluimos en el punto 9.7:

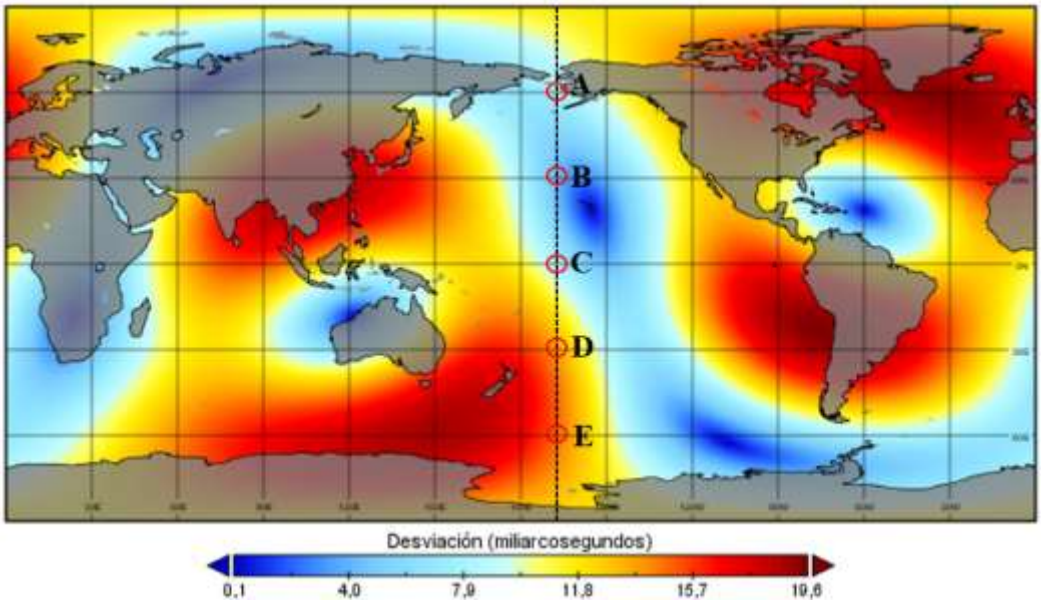


Figura 53: Desviación cenital en miliarcosegundos por efecto de las mareas de equilibrio sobre los cinco puntos elegidos, para el día 11/11/2020 y a las 12:00 horas (UTC).

Ahora realicemos los mismos cálculos, pero para puntos más diferenciados en coordenadas, esta vez en diferentes meridianos y paralelos y en un periodo de tiempo más prolongado:

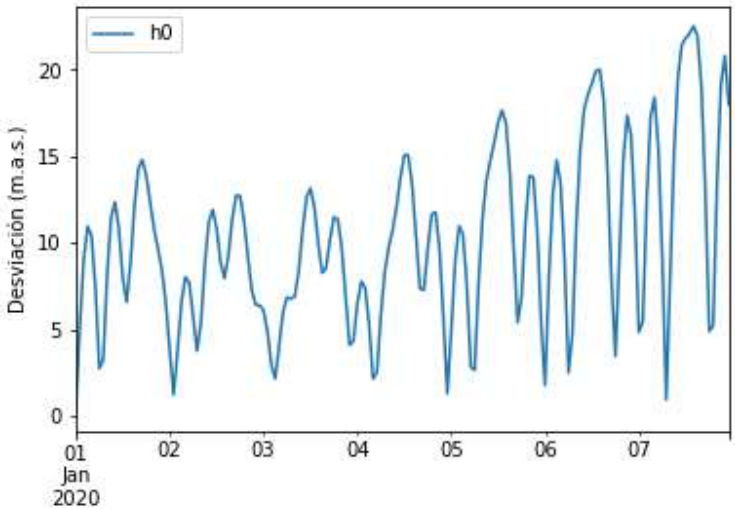


Figura 54: Desviaciones cenitales para un punto F en coordenadas φ=15ºS, λ =139ºE (Golfo de Carpentaria, Australia) en el periodo del 01 al 08 de enero de 2020.

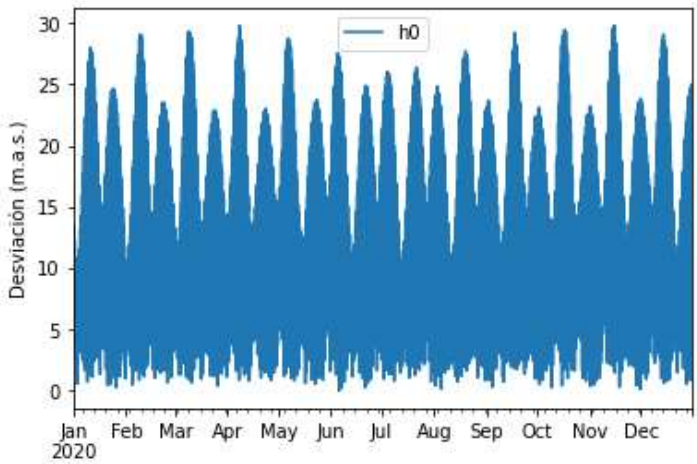


Figura 55: Desviaciones cenitales para un punto G en coordenadas φ=0ºN, λ =0ºW (Golfo de Guinea) en el periodo del año 2020.

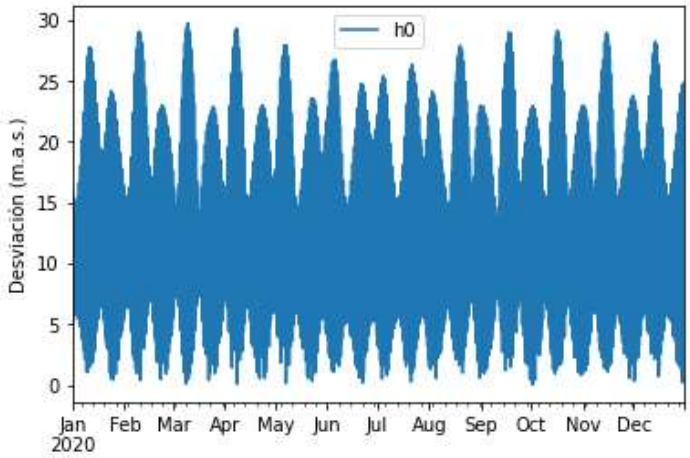


Figura 56: Desviaciones cenitales para un punto H en coordenadas φ=45ºN, λ =2ºW (Bahía de Arcachón, Francia) en el periodo del año 2020.

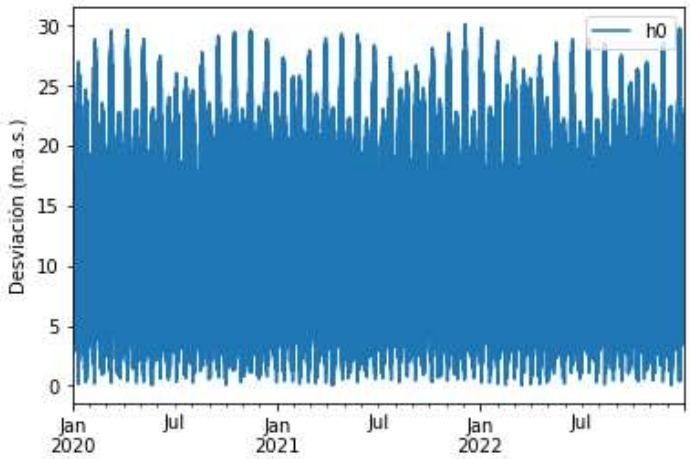


Figura 57: Desviaciones cenitales para un punto I en coordenadas φ=34ºS, λ =79ºW (Isla Robinson Crusoe, Archipiélago de Juan Fernández, Chile) en un periodo de tres años.

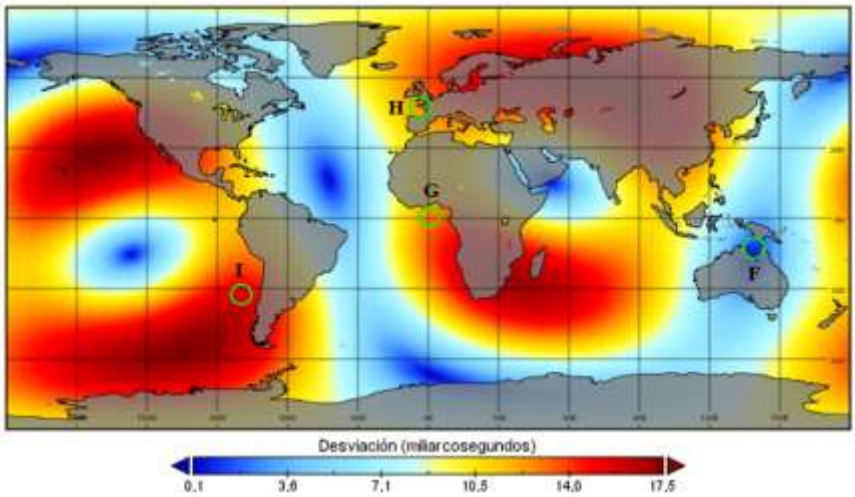


Figura 58: Puntos F-I elegidos sobre un mapa de desviaciones cenitales producidas por efecto de mareas de equilibrio para el día 01/01/2020 a 00:01 horas (UTC).

Para todos los casos analizados observamos que la máxima desviación en la plomada es de 30 m.a.s. aproximadamente, equivalente a 90 cm de error en la superficie terrestre.

Para comprobar si los resultados son coherentes, podemos realizar los cálculos para una fecha y hora donde existan efectos astronómicos extremos sobre las mareas oceánicas: un eclipse lunar y el efecto comúnmente conocido como "superluna" y comprobar los resultados. En un eclipse, el Sol y la Luna se alinean, creando unas mareas de mayor intensidad. Tomemos como ejemplo el eclipse lunar del 5 de julio de 2020. En este día, la Luna tuvo su máximo de ocultación a las 04:31:11 (UTC) en Sudamérica y Antártida[39].

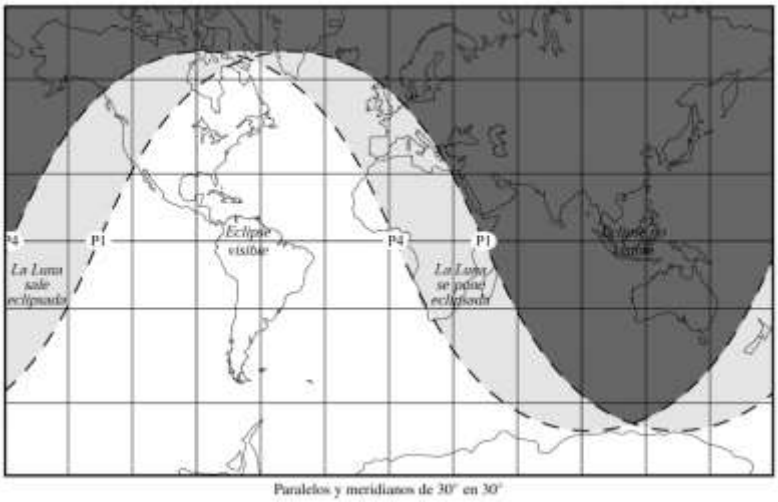


Figura 59: Eclipse lunar del 05/07/2020. Máxima ocultación lunar a 04:31:11 (UTC) sobre Sudamérica y Antártida. Imagen extraída del Almanaque Náutico 2020 [34].

[39] *https://es.wikipedia.org/wiki/Eclipse_lunar_de_julio_de_2020*

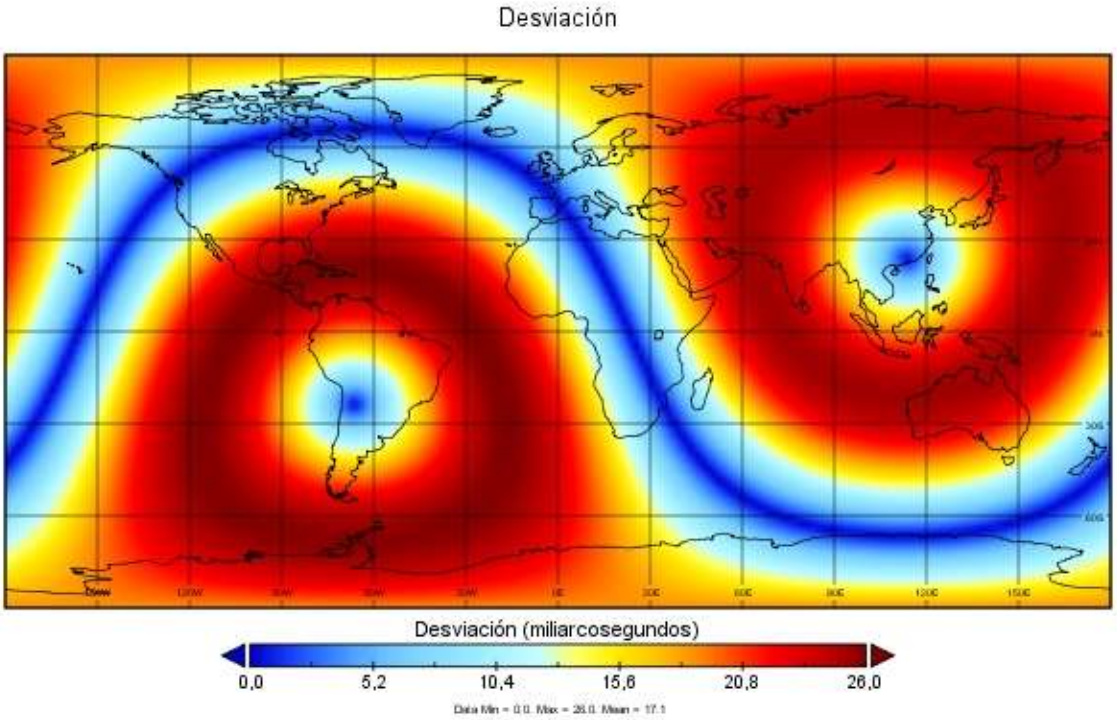


Figura 60: Desviaciones cenitales por efecto de mareas calculadas para el 05/07/2020 a las 04:31:11 (UTC).

Observando la Figura 59 y la Figura 60 vemos similitudes en la zona de máximos de ocultación lunar y los máximos de desviación cenital, ambos en Sudamérica. En este eclipse, la máxima desviación cenital según nuestros cálculos fue de 26 m.a.s.

Estudiemos ahora el caso del efecto de Luna llena del 07/04/2020, conocido popularmente como “Superluna Rosa”. En este día tuvo lugar este efecto astronómico, donde el satélite apareció con el máximo tamaño aparente e intensidad del año 2020, por encontrarse en el perigeo de su órbita con la Tierra. El pico máximo fue a las 18:08 horas (UTC) [40]. El día 07 de abril de 2020, el tamaño aparente de la Luna aumentó un 7% y su destello fue un 15% más fuerte de lo normal[41].

[40] Información en la página web: *https://www.space.com/biggest-supermoon-2020-super-pink-moon-guide.html#:~:text=Skywatching-,April's%20Super%20Pink%20Moon%20is%20the%20biggest%20full%20moon%20of,Here's%20what%20to%20expect.&text=On%20Tuesday%20(April%207)%20at,moon%20will%20officially%20turn%20full.*

[41] Información en la página web: *https://www.elmundo.es/ciencia-y-salud/ciencia/2020/04/06/5e8b1c29fdddff01528b45a4.html*

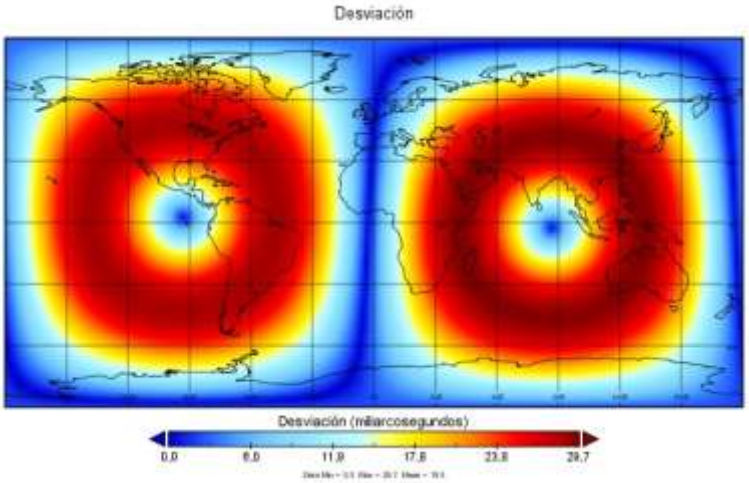


Figura 61: Desviación cenital por efecto de mareas durante la Luna llena del 07/04/2020 a 18:08 horas (UTC).

En este caso, observamos unos altos niveles de desviación cenital, alcanzando los 29.7 m.a.s., el máximo valor que habíamos calculado en las figuras anteriores. En este caso, las regiones de mínimos de desviación cenital se agrupan de manera casi vertical alrededor de meridianos más próximos (meridianos 3ºW y 177ºE aproximadamente)

Este tipo de proyección cilíndrica equidistante tiene el inconveniente de que no es tan intuitivo para comprender qué sucede sobre la zona polar. Visualizando este mismo mapa en proyección acimutal de Lambert:

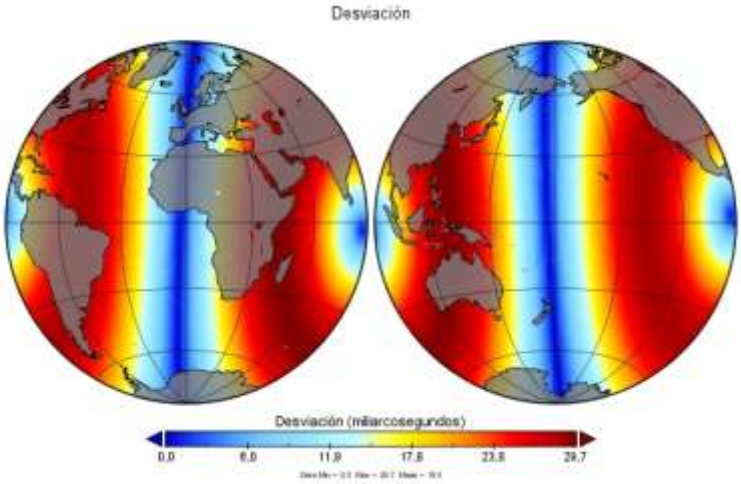


Figura 62: Desviación cenital durante la Luna llena del 07/04/2020 a 18:08 horas (UTC) en proyección acimutal de Lambert.

Conviene recordar que esta desviación por mareas no quiere decir que sea siempre un error añadido al error calculado por la forma de la Tierra del punto 5.1, ya que en ocasiones pueden contrarrestarse.

En las gráficas, el valor h_0 solo lo observamos como valores positivos de error de la gravedad horizontal, por tratarse de un módulo. Sin embargo, al tratarse de un vector, en algunos casos el error se sumará al calculado previamente por efecto de la forma de la Tierra, y en otros casos se restará y los errores se compensarán. Como estamos analizando el valor máximo de error que puedo obtener, solo nos interesan los valores positivos de h_0.

Estos valores de desviación de la plomada por efecto de las mareas de equilibrio son pequeños, en relación con los valores obtenidos con los modelos de la superficie terrestre. Observamos unos valores máximos aproximados de 30 arcosegundos en el caso de las desviaciones cenitales debido a la forma de la Tierra utilizada, y de 30 miliarcosegundos máximos por efecto de las mareas de equilibrio, siendo la relación entre ellos de 1/1000.

6 Conclusiones

De este estudio podemos responder a las cuestiones principales:

- **¿Cuál es el error de posicionamiento derivado del empleo de diferentes modelos gravitatorios y de la forma de la Tierra, desde un simple elipsoide de revolución hasta los más complejos modelos de geoide?**

  Para la navegación astronómica, debemos utilizar el mejor de los modelos de geoide terrestres que seamos capaz de cargar en nuestro sistema. Ha quedado demostrado que cuanto más moderno y eficaz es el modelo, menor es el error en situación. No obstante, para todos los modelos estudiados existen grandes desviaciones, mayores incluso de 1 kilómetro de error en algunas zonas delimitadas tales como límites convergentes de placas tectónicas, fosas oceánicas y otros puntos de interés. Si bien para algunos puntos de la superficie existen unas desviaciones con valores cercanos a cero, por lo general en todos los casos el error suele ser mayor de 5 arcosegundos o 150 metros. Para todos los casos, los mayores errores en las regiones cercanas a España los encontramos alrededor de las islas de Gran Canaria y Tenerife (28-35.9 arcosegundos), suroeste de la Península Ibérica (28-33 arcosegundos), costa norte de Galicia y costa asturiana (26 arcosegundos).

  Aunque estos errores son muy elevados para poder realizar una navegación de precisión, existen más modelos terrestres que deberemos analizar en una fase de proyecto más avanzada para llegar a la conclusión de cuál de ellos es el más apropiado.

- **¿Es realmente importante tener en cuenta el efecto de las mareas de equilibrio, o por el contrario podemos despreciar este efecto?**

  El efecto de las mareas no lo consideramos de excesiva importancia en el error de la geolocalización para puntos lo suficientemente alejados de costa o de otros elementos existentes en la mar (bajos, zonas de pesca, etc.). Este error contribuye aproximadamente a la milésima parte del error obtenido en el punto anterior (la forma de la Tierra), con unos máximos calculados de 0.030 arcosegundos, equivalentes a 90 cm en error de posición en cualquier océano del globo terrestre y para cualquier fecha. Las desviaciones cenitales máximas por efectos de mareas oceánicas se producen durante los efectos astronómicos de lunas nuevas, lunas llenas y eclipses. Consideramos el error máximo de 90 cm como poco importante para posiciones del buque lo suficientemente alejadas de costa y siempre que busquemos una posición de coordenadas meramente informativa (por ejemplo, para un tránsito en el Océano Atlántico, en una navegación entre Europa y Norteamérica). Para las ocasiones donde el buque necesite una precisión máxima, tales como en cercanía de bajos, canal dragada, otros buques en las proximidades, etc., sí debemos tener este error en cuenta ya que en estos casos un error de 90 cm puede resultar ser una distancia importante.

- **¿Cuáles son los efectos atmosféricos más importantes que deberemos tener en cuenta por su efecto sobre los datos de nuestras observaciones?**

  El efecto de la refracción astronómica será mayor cuanto mayor sea la desviación del astro respecto al cénit. Tal y como se detalla en la siguiente sección, sugerimos un estudio futuro más detallado de la refracción atmosférica, en línea con la dependencia del índice de refracción con las diferentes variables que mostramos en la

  Tabla 7. Por otra parte, en la

  Tabla 8 recopilamos los principales fenómenos atmosféricos que pueden tener un efecto sobre la refracción atmosférica, que hemos estudiado en los apartados anteriores.

	P	T	Humedad relativa	Concentración CO_2	Altura (atmósfera estándar)
Índice de refracción n	Aumenta con P	Disminuye con T	Disminuye con HR	Aumenta con concentración CO_2	Disminuye con la altura

Tabla 7: Dependencia de n con diferentes variables atmosféricas.

Efecto atmosférico	Efecto en la desviación
Frentes de presiones y/o temperaturas	La desviación óptica está asociada a los gradientes horizontales de presión y temperatura, como los que aparecen entre las borrascas y los anticiclones.
Jet Streams o corrientes en chorro	Más probable en los meses de invierno y en latitudes alrededor de φ=60º para ambos hemisferios. Baja influencia sobre astros cenitales, pero nunca por debajo de 1 arcosegundo.
Mareas atmosféricas	Dos máximos y dos mínimos de presión diarios. Mayores variaciones de presión en latitudes bajas y variaciones de presión más suaves en latitudes altas.
Ondas de gravedad atmosféricas	No significativo. Pueden producir nubosidad que dificultaría la observación.

Tabla 8: Resumen de los efectos atmosféricos estudiados y su efecto en la geolocalización.

7 Líneas futuras de investigación:

Para una futura fase del proyecto, continuaríamos con los siguientes apartados:

Relativo a la forma de la Tierra:

- Continuar con el estudio del punto 5.1, estudiando otros modelos del geoide, entre los muchos disponibles en la página web de ICGEM [35], y sus errores derivados.

Relativo a las mareas:

- Estudiar la correlación entre las mareas de equilibrio (gravitatorias) y la variación real de la línea del horizonte, condicionadas por la orografía submarina, corrientes marinas, etc.

Relativo a la atmósfera terrestre:

- Realizar un estudio del error producido en condiciones meteorológicas menos favorables (un porcentaje de nubosidad o bruma, calima, etc.)
- Ampliar el rango del estudio para astros no cenitales.
- Crear un código, que mediante la introducción de las coordenadas geográficas (latitud y longitud) o bien los datos atmosféricos que nos interesen (presión, temperatura, humedad relativa, etc.), sea capaz de obtener una aproximación del error producido por los efectos atmosféricos, conectando de manera automática a un servicio web meteorológico en tiempo real.
- Elaboración de un código Python para el cálculo de perfiles atmosféricos del índice de refracción considerando los gradientes horizontales originados por la variabilidad de presión, temperatura y humedad a nivel del mar.

Nuevos apartados:

- Analizar el error máximo en la situación, producido por los diferentes movimientos del buque en la mar, según las características tanto del buque como de la ola, estudiando en qué lugar de la plataforma deberíamos situar la cámara para que el error sea el mínimo.
- Estudio y elaboración de un sistema de suspensión para minimizar los movimientos del equipo en la mar.
- Analizar el error producido por las características del telescopio, investigando qué modelo de sistema y qué lentes o espejos son los más apropiados para nuestro estudio.
- Analizar el error producido por las características de la cámara astrofotográfica y por el procesado de datos.
- Estudiar con detenimiento la combinación de todos los factores mencionados.

8 Bibliografía

[1] A. H. Pérez, «El dragón en el astrolabio», 2015.

[2] R. Arroyo Ruiz-Zorrilla, «Avance científico y navegación», *Armada Española*.

[3] A. J. D. A.Lafuente, *La geometrización de la Tierra. (1735-1744)*, Cuadernos. Madrid: Colección dirigida por Dr. A. Albarración Teulón y Dr. José Luis Peset. Instituto Arnau de Vilanova, 1984.

[4] J. Manuel y F. Imízcoz, «Informe de Juan Bautista Labaña , cosmógrafo real , sobre el sistema de cálculo de la longitud de Galileo Galilei», vol. XII.

[5] I. Ibáñez Fernández, «Evolución de la Navegación Astronómica en el siglo XIX», *Evol. La Naveg. Astronómica En El Siglo Xix*, 2011, [En línea]. Disponible en: http://www.euskomedia.org/PDFAnlt/lankidetzan/57/57209242.pdf.

[6] I. Asimov, *El Universo*, Alianza Ed. 1966.

[7] A. M. Antonio Lafuente, *Los Caballeros del Punto Fijo*. 1987.

[8] M. J. S. de Lerma, «Introducción histórica a la geodesia», *Inst. Astron. y Geod. - UCM Madrid*, 1999, [En línea]. Disponible en: https://digital.csic.es/handle/10261/23506.

[9] J. M. R. V y J. G. T. L, «El origen del metro y la confianza en la matemática», *Matemáticas Enseñanza Univ.*, 2011.

[10] M. Schiavon, «La geodesia y la investigación científica en la Francia del Siglo XIX la medición del arco de meridiano franco-argelino (1870-1895)», *Rev. Colomb. Sociol.*, 2004.

[11] I. A. Fernandez-Coppel, «El Datum», *Localizaciones Geográficas. El datum*, 2001.

[12] R. P. G. Javier MªSánchez Espeso, «Topografía y Geodesia», *E.T.S. Ing. Caminos, Canales y Puertos*, 2014.

[13] Instituto Hidrográfico de la Marina, «Avisos a los navegantes», *Inst. Hidrográfico la Mar.*, 2018.

[14] «National Geospatial-Intelligence Agency (NGA), Office of Geomatics. World Geodetic System 1984 (WGS 84). Earth Gravitational Model 2008 (EGM2008).» https://earth-info.nga.mil/GandG/update/index.php?dir=wgs84&action=wgs84#tab_egm2008.

[15] J. Mezcua y A. Udías, «Fundamentos de Geofísica». Alianza Universidad Textos, 1997.

[16] B.J.Retallack, «Compendio de apuntes para la formación del personal meteorológico de la clase III», *Organ. meteorológica mundial. Traducción al Castell. D.Jacobo López Rego, Dir. del Inst. Nac. Meteorol. España*, 1975.

[17] J. F. Prieto y J. Velasco, «Modelos de Refracción Astronómica», *Astron. geodésica*, 2011.

[18] W. Torge, *Geodesy*. Hannover: National & University Library, 2001.

[19] J. Gállego, «Observación astronómica efectos de la atmósfera terrestre». Máster Astrofísica - Universidad Complutense de Madrid.

[20] P. Koch, H. Wernli, y H. C. Davies, «An event-based jet-stream climatology and typology», *Int. J. Climatol.*, vol. 26, 2006, doi: 10.1002/joc.1255.

[21] D. D. McCarthy y G. Petit, *IERS conventions (2003). Technical Note 32*. 2004.

[22] R. Purvinskis, D. Giggenbach, H. Henniger, N. Perlot, y F. David, «Multiple-

wavelength free-space laser communications», *Free. Laser Commun. Technol. XV*, vol. 4975, n.º May, p. 12, 2003, doi: 10.1117/12.478932.
[23] J. Stam y E. Languénou, «Ray Tracing in Non-Constant Media», *Dep. Comput. Sci. Univ. Toronto, Canadá, Univ. Nantes, Fr.*
[24] G. Guo y S. Li, «Study on the vertical profile of refractive index in the troposphere.», *Int. J. Infrared Millimeter Waves*, vol. 21, n.º 7, pp. 1103-1111, 2000.
[25] A. Sánchez-Lavega, *An Introduction to Planetary Atmospheres*. 2011.
[26] A. Hasha, O. Bühler, y J. Scinocca, «Gravity wave refraction by three-dimensionally varying winds and the global transport of angular momentum», *J. Atmos. Sci.*, vol. 65, n.º 9, pp. 2892-2906, 2008, doi: 10.1175/2007JAS2561.1.
[27] T. TSUDA, «Review Characteristics of atmospheric gravity waves observed using the MU (Middle and Upper atmosphere) radar and GPS (Global Positioning System) radio occultation», vol. 90, 2014.
[28] J. M. Forbes, «Atmospheric tides: Model description and results for the solar diurnal component», *J. Geophys. Res. Sp. Phys.*, 1982, doi: 10.1029/ja087ia07p05222.
[29] F. Le Blancq, «Diurnal pressure variation: the atmospheric tide», *Jersey Meteorol. Dep.*, 2011, doi: 10.1002/wea.765.
[30] M. A. Geller, *Atmospheric tides—Thermal and gravitational*, vol. 11, n.º 1. 1972.
[31] C. C. Possia N, Cerne B, «Análisis preliminar de la tendencia de presión en Argentina», *Dep. Ciencias la Atmósfera y los Océanos, Fac. Ciencias Exactas y Nat. UBA*, n.º 1687, 2004.
[32] J. M. Martínez Solares, «El Terremoto de Lisboa de 1 de noviembre de 1755», *Física la Tierra*, 2017, doi: 10.5209/fite.57340.
[33] I. M. Longman, «Formulas for computing the tidal correction due to the moon and the sun», *J. Geophys. Res.*, 1959.
[34] R. I. y O. de la Armada, «Almanaque náutico 2020», vol. CCXXIX, 2020.
[35] «Modelos ICGEM». http://icgem.gfz-potsdam.de/tom_longtime.

9 Anexos

9.1 Demostración 1. Representación del radio de la elipse en función de la latitud y semiejes.

A continuación, representamos una figura de la Tierra elipsoidal, y calculamos el radio terrestre en función de su latitud y semiejes:

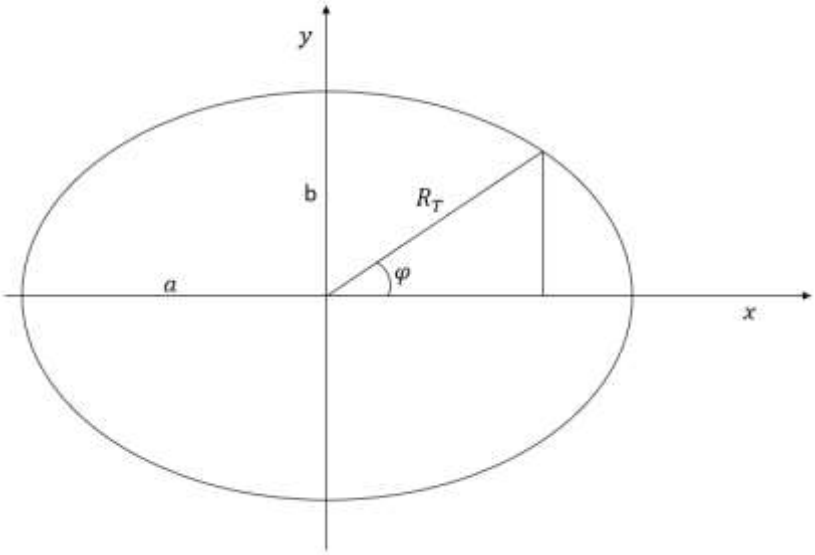


Figura 63: Elipsoide oblato y radio terrestre en función de su latitud (elaboración propia).

Queremos obtener la variación del radio terrestre en función del resto de datos. Comenzamos escribiendo la ecuación de la elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ \ (ec.1)$$

La ecuación de la recta que pasa por el centro de la Tierra con una determinada pendiente es:

$$y = k \cdot x$$

La pendiente *k* es la proporción $\frac{y}{x}$, es decir, $\frac{sen\varphi}{cos\varphi}$

$$y = (tg\varphi) \cdot x$$

Por otra parte, haciendo uso del Teorema de Pitágoras y sustituyendo con esta última ecuación, obtenemos el radio de la Tierra en función de la latitud:

$$r(\varphi) = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + x^2 \cdot tg^2\varphi}$$

Sacando factor común:

$$r(\varphi) = x\sqrt{1 + tg^2\varphi}$$

Por trigonometría:

$$1 + tg^2\varphi = sec^2\varphi$$

Sustituyendo y resolviendo:

$$r(\varphi) = \frac{x}{cos\varphi}$$

La ec.1 queda de la siguiente manera:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(tg\varphi)^2 \cdot x^2}{b^2} = 1$$

Sacando factor común:

$$x^2\left[\frac{1}{a^2} + \frac{(tg\varphi)^2}{b^2}\right] = 1$$

Sustituyendo x por $r(\varphi) \cdot cos\varphi$:

$$r^2(\varphi) \cdot cos^2\varphi\left[\frac{1}{a^2} + \frac{(tg\varphi)^2}{b^2}\right] = 1$$

$$r(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{\left[\frac{1}{a^2} + \frac{(tg\varphi)^2}{b^2}\right]}cos\varphi} = \frac{1}{\sqrt{\frac{cos\varphi^2}{a^2} + \frac{sen\varphi^2}{b^2}}}$$

Esta última ecuación representa la variación del radio de la Tierra en función de los semiejes mayor y menor *(a,b)* y de la latitud φ para un observador sobre un modelo de la Tierra elipsoidal.

9.2 Demostración 2. Relación entre la desviación en arcosegundos y el error en la superficie en metros.

Vamos a explicar a qué nos referimos cuando hablamos de un error en la posición en "arcosegundos". El error observado en arcosegundos, lo podemos expresar en distancia sobre la superficie terrestre según la siguiente fórmula:

$$error\ en\ posición\ (km) = \frac{2 \cdot \pi \cdot R_T(km) \cdot desviación\ (arco\ segundos) \cdot \frac{1º}{3600"}}{360º}$$

(Ecuación 1)

El error en posición sobre la superficie terrestre, para un ángulo de desviación de 1 arcosegundo y un valor del radio de la Tierra de 6371 km (ver Figura 64) será:

$$error\ en\ posición\ (km) = \frac{2 \cdot \pi \cdot 6371\ km \cdot 1" \cdot \frac{1°}{3600"}}{360°} \approx 0.030\ km = 30\ metros$$

(Ecuación 2)

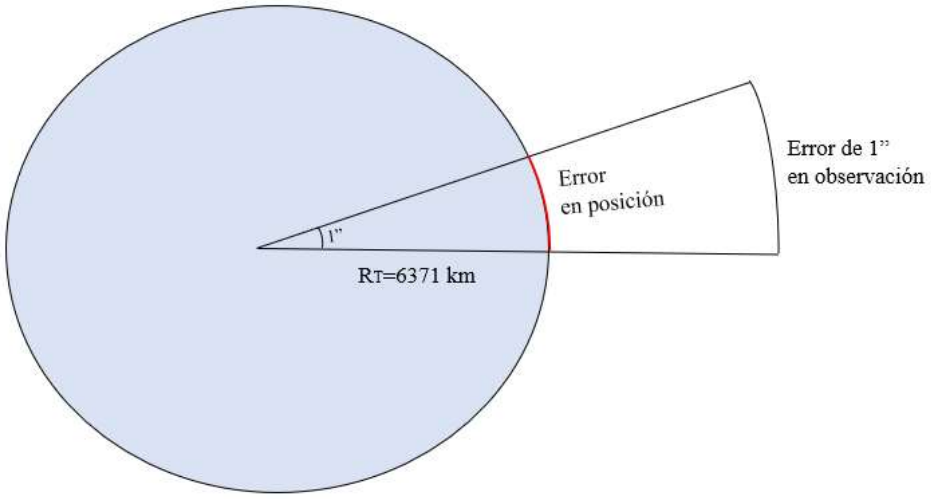


Figura 64: Error en posición considerando un error de 1 arcosegundo y un valor del radio terrestre de 6371 km sobre una idealización de Tierra esférica (elaboración propia).

Estos cálculos tienen sentido para una hipotética Tierra esférica, pero ¿Podemos asumir que 1 arcosegundo de desviación equivale a 30 metros para un elipsoide? Para saberlo, hemos incluido un código Python en el punto 9.9, que nos permite hallar el error en la superficie para todas las latitudes del elipsoide. Este código que incluimos, primero calcula el radio de la elipse en función de la latitud y semiejes, que demostramos en el punto 9.1:

$$r(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{\frac{cos\varphi^2}{a^2} + \frac{sen\varphi^2}{b^2}}}$$

Con el valor de R_T obtenido, y con la Ecuación 1 de este apartado, hallamos el error en posición para varias latitudes de un elipsoide dado y para 1 arcosegundo de desviación. Nosotros hemos elegido como ejemplo el elipsoide GRS-80 (Datos del elipsoide en la

Tabla 3):

Latitud del observador (Norte o Sur)	**Error en posición para 1 arcosegundo de desviación astronómica en un modelo terrestre Elipsoide GRS-80.**
0º	30.922 m
30º	30.896 m
60º	30.844 m
90º	30.818 m

Tabla 9: Error sobre la superficie, para varias latitudes y para 1 arcosegundo de desviación, tomando como referencia el elipsoide GRS-80.

Puesto que con 1 arcosegundo de desviación, obtenemos prácticamente los mismos valores para todas las latitudes, (solo 0.11 m de diferencia entre el máximo y el mínimo error), deducimos que podemos considerar 1 arcosegundo como 30 m de error para todo el globo, independientemente del modelo de la Tierra elegido (hemos redondeado a 30 m para simplificar los cálculos).

9.3 Coordenadas astronómicas.

En Astronomía, se utiliza un sistema de coordenadas polar (r, φ, ψ). Pero al no conocer con exactitud la distancia del astro al observador, no sabremos la posición donde se encuentra, pero sí su dirección. Los dos sistemas más utilizados en astronomía son el sistema de coordenadas horizontal y el sistema de coordenadas ecuatorial.

9.3.1 Sistema de coordenadas horizontal.

Este se trata de un sistema centrado sobre el observador principal donde el plano fundamental es el horizonte en tierra. Las coordenadas astronómicas del astro las definimos con dos ángulos: El acimut (A) que va de 0 a 360º y la altura (h) de 0 a 90º. El acimut se cuenta desde el punto Sur hasta la vertical del astro. La altura en este caso es el ángulo entre el horizonte y el astro en dirección hacia el cénit (positivo) o hacia el nadir (negativo) medido en la posición del observador.

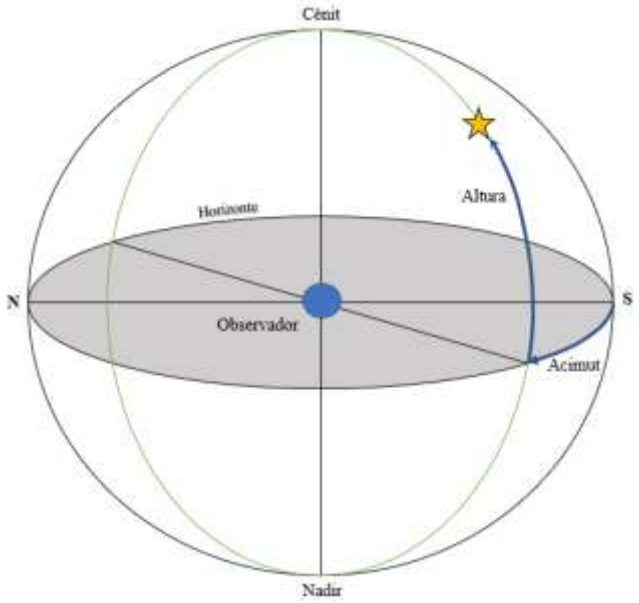


Figura 65: Sistema de coordenadas horizontal (Elaboración propia).

9.3.2 Sistema de coordenadas ecuatoriales horarias.

En este sistema, el origen es el centro de la Tierra y el plano fundamental es el ecuador terrestre. Las coordenadas son el ángulo horario H, el cual se define como el ángulo de 0 a 360º que forma el meridiano superior del lugar (meridiano donde se encuentra el observador) con el círculo horario que pasa por el astro. La segunda coordenada es la declinación (δ), definida como el arco de meridiano en grados de 0 a ± 90º desde el ecuador a la estrella

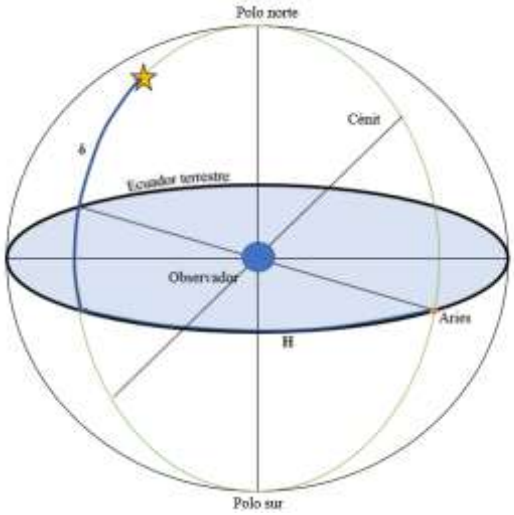


Figura 66: Sistema de coordenadas ecuatoriales horarias (Elaboración propia).

Una diferencia importante de este último sistema de coordenadas con el sistema de coordenadas horizontales, es que el sistema ecuatorial es geocéntrico (el origen de coordenadas es el centro de la Tierra) mientras que el sistema horizontal es topocéntrico (el origen de coordenadas es el observador).

9.3.3 Sistema de coordenadas ecuatoriales absolutas.

Las coordenadas en este caso son declinación (δ) mencionada anteriormente y ascensión recta (α), siendo la ascensión recta el arco de ecuador celeste medido de 0 a 360º desde el punto Aries hasta el meridiano del astro. Por defecto, el sistema utilizado para referirnos a la posición de un astro es el sistema de coordenadas ecuatoriales absolutas.

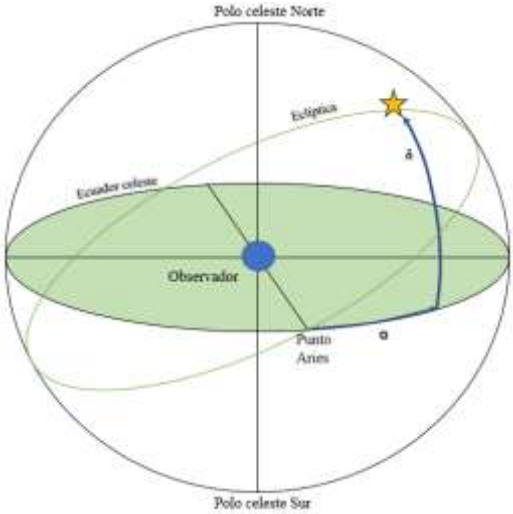


Figura 67: Sistema de coordenadas ecuatoriales absolutas (Elaboración propia).

9.4 Código Python 1. Creación del mapa de desviación cenital entre dos modelos terrestres diferentes de la librería ICGEM.

```
#Desviación del geoide EGM2008 respecto a elipsoide EGM2008:
#Importamos paquetes
import math
import numpy as np
import pyshtools as pysh

#Vector unitario del vector de gravedad en el punto:
#(r=radio, theta=colatitud, phi=longitud)
def vector_unitario(r,theta,phi):
#norma_euclidea=módulo del vector unitario:
    norma_euclidea = np.sqrt( r**2 + theta**2 + phi**2 )
    return np.divide(r,norma_euclidea) , np.divide(theta,norma_euclidea) , \
        np.divide(phi,norma_euclidea)

#Calculamos el ángulo entre los vectores de gravedad de dos modelos terrestres
#diferentes:
def angulo_entre_vectores_arcsec(r_1,theta_1,phi_1,r_2,theta_2,phi_2):
    unit_r_1 , unit_theta_1 , unit_phi_1 = vector_unitario(r_1,theta_1,phi_1)
    unit_r_2 , unit_theta_2 , unit_phi_2 = vector_unitario(r_2,theta_2,phi_2)

    producto_escalar = np.multiply(
        unit_r_1,unit_r_2) \
        + np.multiply(unit_theta_1,unit_theta_2) \
        + np.multiply(unit_phi_1,unit_phi_2)

    #El ángulo entre dos vectores es el arcoseno del producto escalar.
    #Lo pasamos a arcosegundos:
    return np.arccos(producto_escalar) * 180 * 3600 / math.pi

#Ajustamos el tamaño de las matrices rellenando con ceros para que contengan
#las mismas celdas:
def ajustar_tamano(matriz_pequena,matriz_grande):
    resultado = np.zeros(np.shape(matriz_grande))
    x,y,z = np.shape(matriz_pequena)
    resultado[:,:y,:z] = matriz_pequena
    return resultado

#Comparamos dos geoides diferentes:
def comparar_geoides(gfc_geoide_1,gfc_geoide_2):
    cilm_geoid_1, gm_1, r0_1 = pysh.shio.read_icgem_gfc(gfc_geoide_1)
    cilm_geoid_2, gm_2, r0_2 = pysh.shio.read_icgem_gfc(gfc_geoide_2)

    rad_geoid_1, theta_geoid_1, phi_geoid_1, total_geoid_1, pot_geoid_1 \
        = pysh.shtools.MakeGravGridDH (cilm=cilm_geoid_1, gm=gm_1, r0=r0_1, extend=True)

    rad_geoid_2, theta_geoid_2, phi_geoid_2, total_geoid_2, pot_geoid_2 \
        = pysh.shtools.MakeGravGridDH (cilm=ajustar_tamano(cilm_geoid_2,cilm_geoid_1),
                                       gm=gm_2, r0=r0_2, extend=True)

    desviacion = angulo_entre_vectores_arcsec(rad_geoid_1, theta_geoid_1,
                                              phi_geoid_1,rad_geoid_2,
                                              theta_geoid_2, phi_geoid_2)
    tamano = np.shape(desviacion)
    lat = np.linspace(start=90,stop=-90,num=tamano[0])
    lon = np.linspace(start=0,stop=360,num=tamano[1])
    return desviacion , lat , lon

#Comparamos un elipsoide con un geoide. Definimos qué modelos comparamos.
#En este ejemplo un modelo de geoide EGM2008 vs un modelo de elipsoide EGM2008:
angulo , lat , lon = comparar_geoides('EGM2008.gfc','EGM2008-elipsoide-solo.gfc')

#Convertimos el archivo en formato netCDF4 para abrirlo en Panoply
import netCDF4 as nc4
f = nc4.Dataset('EGM2008-vs-elipsoideEGM2008','w', format='NETCDF4') #'w' para “write”
angulo_grp = f.createGroup('Angulo')
angulo_grp.createDimension('lon', len(lon))
angulo_grp.createDimension('lat', len(lat))
```

```
longitude = angulo_grp.createVariable('Longitude', 'f8', 'lon')
latitude = angulo_grp.createVariable('Latitude', 'f8', 'lat')
desviacion = angulo_grp.createVariable('Desviacion', 'f8', ('lat', 'lon'))
longitude[:] = lon
latitude[:] = lat
desviacion[:,:] = angulo

#Add global attributes
f.description = "Desviación de la vertical respecto al elipsoide"

#Add local attributes to variable instances
longitude.units = 'degrees east'
latitude.units = 'degrees north'
desviacion.units = 'Arcsec'

f.close()
```

9.5 Código Python 2. Mareas de equilibrio.

```
# -*- coding: utf-8 -*-
from datetime import datetime
from math import radians
from typing import Union
import numpy as np
import pandas as pd


__all__ = ['calculate_julian_century',
           'solve_pollack_tide', 'solve_pollack_tide_scalar',
           'solve_pollack_tide_df', 'solve_pollack_point_corr']


"""
Pollack Earth Tide Calculator

Based on Henry N. Pollack's formulas for the resolution of the horizontal
component of tidal acceleration.

Adapted from Zachery Brady's implementation of I. M. Longman's earth tide
calculations, which is itself based on John Leeman's implementation of
I. M. Longman's earth tide calculations.

Parts of this program by (c) 2018 Zachery Brady and (c) 2017 John Leeman

Any other modifications from the base TideGravity
(c) 2020 Víctor de Ory Guimerá - vdeory@roa.es

Licensed under the MIT License, see LICENSE file for full text

References
----------
Henry N. Pollack, "Longman Tidal Formulas: Resolution of Horizontal Components"
Journal of Geophysical Research, Vol. 78, No. 14, May 10, 1973.

I.M. Longman "Formulas for Computing the Tidal Accelerations Due to the Moon
and the Sun"Journal of Geophysical Research, vol. 64, no. 12, 1959, pp. 2351-2355

P. Schureman "Manual of harmonic analysis and prediction of tides"
U.S. Coast and Geodetic Survey, 1958

Zachery Brady's GitHub page for the original implementation of this library:
https://github.com/bradyzp/LongmanTide/blob/master/tidegravity/tidegravity.py

John Leeman's GitHub page for the implementation of Brady's library:
    https://github.com/jrleeman/LongmanTide

Notes
-----
Unicode greek symbols are used to more clearly name variables based on the
equations in Longman's paper. This is simply a style decision and may not
reflect Python best practices.

```

```
Pythons Datetime.datetime objects are TimeZone naive - e.g. when creating a
datetime of "datetime(1899, 12, 31, 12, 0, 0)"
The object refers to exactly the time specified, with no knowledge of the
time-zone - when doing calculations against such an object we need to make
sure that whatever datetime being used is specified in the same time zone.

"""

# Constants Definitions #
μ = 6.673e-8  # Newton's gravitational constant in cgs units
M = 7.3537e25  # Mass of the moon in grams
S = 1.993e33  # Mass of the sun in grams
e = 0.05490  # Eccentricity of the moon's orbit
m = 0.074804  # Ratio of mean motion of the sun to that of the moon
c = 3.84402e10  # Mean distance between the centers of the earth and the moon in cm
c1 = 1.495e13  # Mean distance between centers of the earth and sun in cm
a = 6.378270e8  # Earth's equatorial radius in cm
i = 0.08979719  # (i) Inclination of the moon's orbit to the ecliptic
ω = radians(23.452)  # Inclination of the Earth's equator to the ecliptic
origin_date = datetime(1899, 12, 31, 12, 00, 00)  # Noon Dec 31, 1899
# End Constants Definitions #


def calculate_julian_century(dates: Union[np.ndarray, pd.DatetimeIndex]):
    """
    Calculate the decimal Julian century and floating point hour, as referenced
    from 1899, December 31 at 12:00:00
    This function accepts either a numpy ndarray or pandas DatetimeIndex as input,
    and returns a 2-tuple of the corresponding Julian century decimals and floating
    point hours.

    Parameters
    ----------
    dates : Union[np.ndarray, pd.DatetimeIndex]
        1-dimensional array of DateTime objects to convert into
        century/hours arrays

    Notes
    -----
    All DateTimes should be supplied as UTC values, using a timezone-naive
    DateTime object. This can be accomplished either by using datetime.utcnow(),
    or by constructing datetime objects where the times are specified as UTC values

    Reference Date: 1899 December 31 12:00:00
    Reference ordinal: 693961.5 (MATLAB Serial date from January 0, 0000)
        Delta 366 days
    Reference ordinal: 694327.5 (Python ordinal from January 1, 0001)

    Returns
    -------
    2-tuple of:
        T : np.ndarray
            Number of Julian centuries (36525 days) from GMT Noon on
            December 31, 1899
        t0 : np.ndarray
            Greenwich civil dates measured in hours

    """
    if isinstance(dates, np.ndarray):
        delta = dates - origin_date
        days = np.array([x.days + x.seconds / 3600. / 24. for x in delta])
        t0 = np.array([x.hour + x.minute / 60. + x.second / 3600. for x in dates])
        return days / 36525, t0
    elif isinstance(dates, pd.DatetimeIndex):
        delta = dates - origin_date
        days = delta.days + delta.seconds / 3600. / 24.
        t0 = dates.hour + dates.minute / 60. + dates.second / 3600.
        return days / 36525, t0.values

def solve_pollack_tide(lat: np.ndarray, lon: np.ndarray, alt: np.ndarray,
                       time: np.ndarray):
    """
    Find the total gravity correction due to the Sun/Moon for the given
    latitude, longitude, altitude, and time - supplied as numpy 1-d arrays.
    Corrections are calculated for each corresponding set of data in the
```

```
    supplied arrays, all arrays must be of the same shape (length and dimension)

    This function returns the Lunar, Solar, and Total gravity corrections as
    a 3-tuple of numpy 1-d arrays.

    Parameters
    ----------
    lat : np.ndarray
        1-dimensional array of float values denoting latitudes
    lon : np.ndarray
        1-dimensional array of float values denoting longitudes
    alt : np.ndarray
        1-dimensional array of float values denoting altitude in meters
    time : np.ndarray
        1-dimensional array of DateTime objects denoting the time series

    Returns
    -------
    3-Tuple
        h0S (mas): Horizontal component in South direction of tidal acceleration
                due to the Moon and the Sun, expressed as tilt in m.a.s.
        h0W (mas): Horizontal component in West direction of tidal acceleration
                due to the Moon and the Sun, expressed as tilt in m.a.s.
        h0 (mas):  Magnitude of the horizontal component of tidal acceleration
                due to the Moon and the Sun, expressed as tilt in m.a.s.
                h0 = sqrt( h0S^2 + h0W^2 )

    """

    assert lat.shape == lon.shape == alt.shape == time.shape

    T, t0 = calculate_julian_century(time)
    T2 = T ** 2
    T3 = T ** 3

    # t0 must be an ndarray, not a pandas DatetimeIndex
    t0[t0 < 0] += 24
    t0[t0 >= 24] -= 24

    # longitude is defined with West positive (+) in the Longman paper
    φ = -lon
    λ = np.radians(lat)  # λ Latitude of point P
    cosλ = np.cos(λ)
    sinλ = np.sin(λ)
    H = alt * 100  # height above sea-level of point P in centimeters (cm)

    # Lunar Calculations

    # s Mean longitude of moon in its orbit reckoned from the referred equinox
    # Constants from Bartels [1957 pp. 747] eq (10')
    # 270°26'11.72" + (1336 rev. + 1,108,406.05")T + 7.128" * T2 + 0.0072" * T3
    # Where rev. is revolutions expressed as radians:
    # 1336 rev. = 1336 * 2 * pi = 8394.335570392
    s = 4.72000889397 \
        + 8399.70927456 * T + 3.45575191895e-05 * T2 + 3.49065850399e-08 * T3
    # p Mean longitude of lunar perigee
    # constants from Bartels [1957] eq (11')
    # p = 334° 19' 46.42" + (11 rev. + 392,522.51") T - 37.15" * T2 - 0.036" T3
    p = 5.83515162814 \
        + 71.0180412089 * T + 0.000180108282532 * T2 + 1.74532925199e-07 * T3
    # (h) Mean longitude of the sun
    h = 4.88162798259 + 628.331950894 * T + 5.23598775598e-06 * T2
    # (N) Longitude of the moon's ascending node in its orbit reckoned from the
    # referred equinox
    N = 4.52360161181 \
        - 33.757146295 * T + 3.6264063347e-05 * T2 + 3.39369576777e-08 * T3
    cosN = np.cos(N)
    sinN = np.sin(N)

    # I (uppercase i) Inclination of the moon's orbit to the equator
    I = np.arccos(np.cos(ω) * np.cos(i) - np.sin(ω) * np.sin(i) * cosN)
    # ν (nu) Longitude in the celestial equator of its intersection A with the
    # moon's orbit
    ν = np.arcsin(np.sin(i) * sinN / np.sin(I))
    # t Hour angle of mean sun measured west-ward from the place of observations
    t = np.radians(15. * (t0 - 12) - φ)
```

```
# χ (chi) right ascension of meridian of place of observations reckoned from A
χ = t + h - ν
# cos α (alpha) where α is defined in eq. 15 and 16
cos_α = cosN * np.cos(ν) + sinN * np.sin(ν) * np.cos(ω)
# sin α (alpha) where α is defined in eq. 15 and 16
sin_α = np.sin(ω) * sinN / np.sin(I)
# (α) α is defined in eq. 15 and 16
α = 2 * np.arctan(sin_α / (1 + cos_α))
# ξ (xi) Longitude in the moon's orbit of its ascending intersection with
# the celestial equator
ξ = N - α

# σ (sigma) Mean longitude of moon in radians in its orbit reckoned from A
σ = s - ξ
# l (lowercase el) Longitude of moon in its orbit reckoned from its
# ascending intersection with the equator
l = σ + 2 * e * np.sin(s - p) + (5. / 4) * e * e * np.sin(2 * (s - p)) \
    + (15. / 4) * m * e * np.sin(s - 2 * h + p)\
    + (11. / 8) * m * m * np.sin(2 * (s - h))

# Solar Calculations

# p1 (p-one) Longitude of solar perigee (Schureman [1941, pp. 162])
# p1 = 281° 13' 15.0" + 6189.03" T + 1.63" T2 + 0.012" T3
p1 = 4.90822941839 \
    + 0.0300025492114 * T + 7.85398163397e-06 * T2 + 5.3329504922e-08 * T3
# e1 (e-one) Eccentricity of the Earth's orbit
e1 = 0.01675104 - 0.00004180 * T - 0.000000126 * T2
# χ1 (chi-one) right ascension of meridian of place of observations
# reckoned from the vernal equinox
χ1 = t + h
# l1 (lowercase-el(L) one) Longitude of sun in the ecliptic reckoned from
# the vernal equinox
l1 = h + 2 * e1 * np.sin(h - p1)
# cosθ (theta) θ represents the zenith angle of the moon
cosθ = sinλ * np.sin(I) * np.sin(l) \
    + cosλ * (np.cos(0.5 * I) ** 2 * np.cos(l - χ) \
            + np.sin(0.5 * I) ** 2 * np.cos(l + χ))
# cosφ (phi) φ represents the zenith angle of the sun
cosφ = sinλ * np.sin(ω) * np.sin(l1) \
    + cosλ * (np.cos(0.5 * ω) ** 2 * np.cos(l1 - χ1) \
            + np.sin(0.5 * ω) ** 2 * np.cos(l1 + χ1))

# Distance Calculations

# (C) Distance parameter, equation 34
# C**2 = 1/(1 + 0.006738 sinλ ** 2)
C = np.sqrt(1. / (1 + 0.006738 * sinλ ** 2))
# (r) Distance from point P to the center of the Earth
r = C * a + H
# a' (a prime) Distance parameter, equation 31
aprime = 1. / (c * (1 - e * e))
# a1' (a-one prime) Distance parameter, equation 31
aprime1 = 1. / (c1 * (1 - e1 * e1))
# (d) Distance between centers of the Earth and the moon
d = 1. / ((1. / c) + aprime * e * np.cos(s - p) \
        + aprime * e ** 2 * np.cos(2 * (s - p)) \
            + (15. / 8) * aprime * m * e * np.cos(s - 2 * h + p) \
                + aprime * m * m * np.cos(2 * (s - h)))
# (D) Distance between centers of the Earth and the sun
D = 1. / ((1. / c1) + aprime1 * e1 * np.cos(h - p1))

# (gm) Vertical component of tidal acceleration due to the moon, equation (1):
# gm = μMr/d^3 (3 * cos^2(θ) - 1) + 3/2 μMr/d^4 * (5 cos^3 θ - 3 cos(θ))
gm = (μ * M * r / d ** 3) * (3 * cosθ ** 2 - 1) \
    + (1.5 * (μ * M * r ** 2 / d ** 4) * (5 * cosθ ** 3 - 3 * cosθ))
# (gs) Vertical component of tidal acceleration due to the sun
gs = μ * S * r / D ** 3 * (3 * cosφ ** 2 - 1)

# g0 Total vertical component due to Lunar and Solar forces
g0 = (gm + gs)


# From Jursa, A. S., Ed., Handbook of Geophysics and the Space Environment, 4th
# Ed., Air Force Geophysics Laboratory, 1985, pp. 14–17.
```

```
    # Via the CRC Handbook, 97th Ed., CRC Press., p. 14-13
    # g/(m/s2) = 9.780356 (1 + 0.0052885 sin2 φ – 0.0000059 sin2 2 φ) – 0.003086 H
    # where φ is the latitude and H is the height in kilometers.
    # Added the vertical component of the tidal acceleration.
    g = g0 + ( 9.780356*(1 + 0.0052885*sinλ**2 \
                    - 0.0000059*np.sin(2*λ)**2) - 0.003086*H*1e-5 ) * 100
      # Units: Gal

    # Converts from horizontal vector component, to tilt in m.a.s.
    def convert_to_mas(h):
      return np.arctan(h/g)*648000000/np.pi

    # The horizontal components of the tidal acceleration in the following lines
    # have been taken from the article by Henry N. Pollack, "Longman Tidal
    # Formulas: Resolution of Horizontal Components"
    # Journal of Geophysical Research, Vol. 78, No. 14, May 10, 1973.

    # Eq. (9) (Pollack 1973)
    sinDm       = np.sin(I)*np.sin(l)
    # Eq. (10) (Pollack 1973)
    cosDm_costm = np.cos(χ)*np.cos(l) + np.sin(χ)*np.sin(l)*np.cos(I)
    # Eq. (11) (Pollack 1973)
    sinDs       = np.sin(ω)*np.sin(l1)
    # Eq. (12) (Pollack 1973)
    cosDs_costs = np.cos(χ1)*np.cos(l1) + np.sin(χ1)*np.sin(l1)*np.cos(ω)
    # Eq. (13) (Pollack 1973)
    cosDm_sintm = ( np.cos(l) - np.cos(χ)*cosDm_costm ) / np.sin(χ)
    # Eq. (14) (Pollack 1973)
    cosDs_sints = ( np.cos(l1) - np.cos(χ1)*cosDs_costs ) / np.sin(χ1)
    # Eq. (7) top (Pollack 1973)
    sinθ_cosAm  = -cosλ*sinDm + sinλ*cosDm_costm
    # Eq. (7) bottom (Pollack 1973)
    sinφ_cosAs  = -cosλ*sinDs + sinλ*cosDs_costs
    # Eq. (8) top (Pollack 1973)
    sinθ_sinAm  = cosDm_sintm
    # Eq. (8) bottom (Pollack 1973)
    sinφ_sinAs  = cosDs_sints


    # From Eq. (1) (Pollack 1973)
    hm_div_sinθ = ( (3*μ*M*r)/(d**3)*cosθ
                + (1.5*μ*M*r**2)/(d**4)*(5*cosθ**2 - 1) )
    # From Eq. (1) (Pollack 1973)
    # hm       = hm_div_sinθ * np.sqrt(1-cosθ**2)

    # From Eq. (2) (Pollack 1973)
    hs_div_sinφ = (3*μ*S*r/D**3) * cosφ

    # From Eq. (2) (Pollack 1973)
    # hs       = hs_div_sinφ * np.sqrt(1-cosφ**2)

    Sm         = hm_div_sinθ * sinθ_cosAm          # Eq. (3) (Pollack 1973)
    Ss         = hs_div_sinφ * sinφ_cosAs          # Eq. (4) (Pollack 1973)
    Wm         = hm_div_sinθ * sinθ_sinAm          # Eq. (5) (Pollack 1973)
    Ws         = hs_div_sinφ * sinφ_sinAs          # Eq. (6) (Pollack 1973)

    # Horizontal south component of acceleration
    h0S        = Sm + Ss
    # Horizontal west component of acceleration
    h0W        = Wm + Ws
    # Total horizontal component of acceleration
    h0         = np.sqrt( h0S**2 + h0W**2 )

    # Returns south component, west component and total tilt in mas, as numpy
    # 1d-arrays
    return convert_to_mas(h0S) , convert_to_mas(h0W) , convert_to_mas(h0)


def solve_pollack_tide_scalar(lat: float, lon: float, alt: float, time: datetime):
    """
    Simple wrapper around solve_pollack_tide that allows passing of singular
    scalar values instead of an array.     This function simply wraps the scalar
    values within an ndarray and then extracts the result elements.

    Parameters
    ----------
```

```
    lat : float
        Latitude as a scalar float value
    lon : float
        Longitude as a scalar float value
    alt : float
        Altitude as a scalar float value
    time : datetime
        Time as a scalar datetime object

    Returns
    -------
    h0S, h0W, h0 : float, float, float

    h0S (mas):  Horizontal component in South direction of tidal acceleration
                due to the Moon and the Sun, expressed as tilt in m.a.s.
    h0W (mas):  Horizontal component in West direction of tidal acceleration
                due to the Moon and the Sun, expressed as tilt in m.a.s.
    h0 (mas):   Magnitude of the horizontal component of tidal acceleration
                due to the Moon and the Sun, expressed as tilt in m.a.s.
                h0 = sqrt( h0S^2 + h0W^2 )

    """
    lat_arr = np.array([lat])
    lon_arr = np.array([lon])
    alt_arr = np.array([alt])
    time_arr = np.array([time])

    h0S, h0W, h0 = solve_pollack_tide(lat_arr, lon_arr, alt_arr, time_arr)

    return h0S[0], h0W[0], h0[0]


def solve_pollack_point_corr(lat: float, lon: float, alt: float, t0=datetime.utcnow(), n=3600, increment='S'):
    """
    Utility function to generate a tide correction DataFrame for a static
    lat/lon/alt given start time t0, an increment, and count (n) of datapoints
    to generate. Default parameters are supplied that will generate a time
    series of the horizontal components of tidal acceleration (South, West and
    magnitude), expressed in m.a.s., with one second increment over a one hour
    period, with start time being the time of execution.

    Parameters
    ----------
    lat : float
        Latitude in decimal degrees
    lon : float
        Longitude in decimal degrees
    alt : float
        Altitude (height) above sea level in meters
    t0 : DateTime
        Starting date/time
    n : int
        Number of data points to generate
    increment : String
        Increment between data points, uses Pandas offset aliases.
        Common options:
            H : Hourly Frequency
            T, min : Minutely frequency
            S : Secondly frequency
            L, ms : millisecond frequency
            U, us : microsecond frequency
            N : nanosecond frequency

    Returns
    -------
    df : pd.DataFrame
        DataFrame (index=DateTime, lat, lon, alt, h0S, h0W, h0) shape: (n, 4)
        Pandas DataFrame indexed by DateTime containing the latitude, longitude,
        altitude, lunar, solar, and horizontal components of tidal acceleration
        (South, West and magnitude), expressed in m.a.s.

    """
    df = pd.DataFrame(data={'lat': np.repeat(lat, n), 'lon': np.repeat(lon, n), 'alt': np.repeat(alt, n)},
                      index=pd.date_range(start=t0, freq=increment, periods=n))

    h0S, h0W, h0 = solve_pollack_tide(df.lat, df.lon, df.alt, df.index)
```

```
    df['h0S'] = h0S
    df['h0W'] = h0W
    df['h0'] = h0
    return df


def solve_pollack_tide_df(df: pd.DataFrame, lat='lat', lon='lon', alt='alt'):
    """
    Solve tidal gravity corrections for a given Pandas DataFrame, returning the
    source DataFrame with an appended 'tide_corr' column.
    Source DataFrame should be indexed by datetime and must contain latitude,
    longitude, and altitude columns.
    Source column names can be specified by passing the applicable column name
    to the lat, lon, alt parameters as required.
    Time is assumed to be the index of the DataFrame

    Returns
    -------
    df : pd.DataFrame
        Copy of source df with added columns 'h0S' 'h0W' and 'h0': horizontal
        components of tidal acceleration (South, West and magnitude),
        expressed in m.a.s.

    """
    _lat = df[lat].values
    _lon = df[lon].values
    _alt = df[alt].values
    _time = df.index
    res_df = df.copy(deep=True)  # type: pd.DataFrame

    h0S, h0W, h0 = solve_pollack_tide(_lat, _lon, _alt, _time)
    res_df['h0S'] = h0S
    res_df['h0W'] = h0W
    res_df['h0'] = h0
    return res_df
```

9.6 Codigo Python 3. Mareas de equilibrio. Generación de gráficas.

```
#Importamos paquetes
from datetime import datetime
import pollack_tides as pt

#Defino la fecha en formato: Año, Mes, Día, Hora de inicio (UTC)
fecha = datetime(2020, 10, 11, 12, 0, 0)

# Defino varios puntos en diferentes latitudes en intervalos de un minuto.
# (Latitud, Longitud, Altitud, Fecha, Cantidad de puntos, Intervalo de tiempo)
# y representamos gráficamente la desviación de la plomada (expresada en
# miliarcosegundos) en cada uno de los puntos, a lo largo de 24 horas,
# con muestras tomadas cada minuto.

dataframe_1 = pt.solve_pollack_point_corr(60,-165,0,fecha,24*60,'min')
ax1 = dataframe_1[['h0']].plot()
ax1.set_ylabel('Desviación (m.a.s.)')

dataframe_2 = pt.solve_pollack_point_corr(30,-165,0,fecha,24*60,'min')
ax2=dataframe_2[['h0']].plot()
ax2.set_ylabel('Desviación (m.a.s.)')

dataframe_3 = pt.solve_pollack_point_corr(0,-165,0,fecha,24*60,'min')
ax3=dataframe_3[['h0']].plot()
ax3.set_ylabel('Desviación (m.a.s.)')

dataframe_4 = pt.solve_pollack_point_corr(-30,-165,0,fecha,24*60,'min')
ax4=dataframe_4[['h0']].plot()
ax4.set_ylabel('Desviación (m.a.s.)')

dataframe_5 = pt.solve_pollack_point_corr(-60,-165,0,fecha,24*60,'min')
ax5=dataframe_5[['h0']].plot()
ax5.set_ylabel('Desviación (m.a.s.)')
```

9.7 Código Python 4. Mareas de equilibrio. Generación de mapas.

```
# Importación de paquetes
from datetime import datetime, timedelta
import numpy as np
import pollack_tides as pt
import netCDF4 as nc4

def mapa_de_mareas_gravitatorias(lin_lat , lin_lon, t0):
    """
    Esta función se emplea para obtener los valores de las mareas de equilibrio
    en las coordenada de un mapa, para un instante de tiempo dado.

    Toma como argumentos de entrada dos vectores con las latitudes y
    longitudes donde se desea conocer la componente horizontal de las mareas
    de equilibrio y un objeto datetime correspondiente al instante temporal
    deseado.

    Devuelve una matriz correspondiente correspondiente con el producto
    cartesiano de los vectores de coordenadas de entrada, donde el valor de
    cada elemento se corresponde con el módulo de la desviación horizontal
    de la plomada expresada en miliarcosegundos.
    """
    # latitud y longitud
    lat_arr, lon_arr = np.meshgrid(lin_lat , lin_lon)
    # altitud cero en todos los puntos (nivel del mar), con las mismas
    # dimensiones que tienen los vectores de latitud y longitud.
    alt_arr = np.zeros_like(lat_arr)
    # creamos un array de tiempos y lo rellenamos con el mismo valor en todos
    # los puntos, correspondiente al t0 en el argumento de entrada.
    time_arr = np.array(
        [t0 + timedelta(hours=i) for i in range(len(lin_lat)*len(lin_lon))])
    for i,x in enumerate(time_arr):
        time_arr[i] = t0
    # Hacemos uso de el módulo de resolución de mareas.
    h0S , h0W , h0 = pt.solve_pollack_tide(
        lat_arr.flatten(), lon_arr.flatten(), alt_arr.flatten(), time_arr)

    return h0.reshape( len(lin_lat) , len(lin_lon) , order='F' )

# Construimos un mapa con 100 puntos equiespaciados de latitud y 200 de
# longitud, lo que se corresponde con un total de 20000 puntos.
n_lat = 100
n_lon = 200
lin_lat = np.linspace(start=90, stop=-90, num=n_lat)
lin_lon = np.linspace(start=0, stop=360, num=n_lon)

# Defino fecha en este caso: (11/10/2020 a 12:00 UTC)
t0 = datetime(2020, 10, 11, 12, 0, 0)

# Invoco la función definida anteriormente.
h0 = mapa_de_mareas_gravitatorias(lin_lat , lin_lon, t0)

# A continuación vamos a generar un archivo netCDF4, para utilizar con Panoply,
# donde insertaremos los datos previamente obtenidos.

# Defino el nombre del archivo netCDF4.
f = nc4.Dataset('mapa_mareas_min.nc','w', format='NETCDF4')

# Creo las estructuras de datos necesarias para almacenar los valores de interés.
angulo_grp = f.createGroup('Angulo')
angulo_grp.createDimension('lon', len(lin_lon))
angulo_grp.createDimension('lat', len(lin_lat))
longitude = angulo_grp.createVariable('Longitude', 'f8', 'lon')
latitude = angulo_grp.createVariable('Latitude', 'f8', 'lat')
desviacion = angulo_grp.createVariable('Desviación', 'f8', ('lat', 'lon'))

# Inserto los valores previamente obtenidos.
longitude[:] = lin_lon
latitude[:] = lin_lat
desviacion[:,:] = h0

# Añado descripción de la magnitud.
f.description = "Desviación de la vertical debida a las mareas gravitatorias"
```

```
# Añado atributos correspondientes a las unidades empleadas.
longitude.units = 'degrees east'
latitude.units = 'degrees north'
desviacion.units = 'miliarcosegundos'

# Cierro el fichero.
f.close()
```

9.8 Código Python 6. Cálculo del índice de refracción

```
# -*- coding: utf-8 -*-
# Author: Mikhail Polyanskiy
# Last modified: 2017-11-23
# Original data: Ciddor 1996, https://doi.org/10.1364/AO.35.001566
# Code repository: https://github.com/polyanskiy/ ...
# ... refractiveindex.info-scripts/blob/master/scripts/Ciddor%201996%20-%20air.py

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
π = np.pi


def Z(T,p,xw): #compressibility
    t=T-273.15
    a0 = 1.58123e-6   #K·Pa^-1
    a1 = -2.9331e-8   #Pa^-1
    a2 = 1.1043e-10   #K^-1·Pa^-1
    b0 = 5.707e-6     #K·Pa^-1
    b1 = -2.051e-8    #Pa^-1
    c0 = 1.9898e-4    #K·Pa^-1
    c1 = -2.376e-6    #Pa^-1
    d  = 1.83e-11     #K^2·Pa^-2
    e  = -0.765e-8    #K^2·Pa^-2
    return 1-(p/T)*(
        a0+a1*t+a2*t**2+(b0+b1*t)*xw+(c0+c1*t)*xw**2) + (p/T)**2*(d+e*xw**2)


def n(λ,t,p,h,xc):
    # λ: wavelength, 0.3 to 1.69 µm
    # t: temperature, -40 to +100 °C
    # p: pressure, 80000 to 120000 Pa
    # h: fractional humidity, 0 to 1
    # xc: CO2 concentration, 0 to 2000 ppm

    σ = 1/λ           #µm^-1

    T= t + 273.15     #Temperature °C -> K

    R = 8.314510      #gas constant, J/(mol·K)

    k0 = 238.0185     #µm^-2
    k1 = 5792105      #µm^-2
    k2 = 57.362       #µm^-2
    k3 = 167917       #µm^-2

    w0 = 295.235      #µm^-2
    w1 = 2.6422       #µm^-2
    w2 = -0.032380    #µm^-4
    w3 = 0.004028     #µm^-6

    A = 1.2378847e-5  #K^-2
    B = -1.9121316e-2 #K^-1
    C = 33.93711047
    D = -6.3431645e3  #K

    α = 1.00062
    β = 3.14e-8       #Pa^-1,
    γ = 5.6e-7        #°C^-2

    #saturation vapor pressure of water vapor in air at temperature T
    if(t>=0):
        svp = np.exp(A*T**2 + B*T + C + D/T) #Pa
```

```
    else:
        svp = 10**(-2663.5/T+12.537)

    #enhancement factor of water vapor in air
    f = α + β*p + γ*t**2

    #molar fraction of water vapor in moist air
    xw = f*h*svp/p

    #refractive index of standard air at 15 °C, 101325 Pa, 0% humidity, 450 ppm CO2
    nas = 1 + (k1/(k0-σ**2)+k3/(k2-σ**2))*1e-8

    #refractive index of standard air at 15 °C, 101325 Pa, 0% humidity, xc ppm CO2
    naxs = 1 + (nas-1) * (1+0.534e-6*(xc-450))

    #refractive index of water vapor at standard conditions (20 °C, 1333 Pa)
    nws = 1 + 1.022*(w0+w1*σ**2+w2*σ**4+w3*σ**6)*1e-8

    Ma = 1e-3*(28.9635 + 12.011e-6*(xc-400)) #molar mass of dry air, kg/mol
    Mw = 0.018015                            #molar mass of water vapor, kg/mol

    Za = Z(288.15, 101325, 0)                #compressibility of dry air
    Zw = Z(293.15, 1333, 1)                  #compressibility of pure water vapor

    #Eq.4 with (T,P,xw) = (288.15, 101325, 0)
    ρaxs = 101325*Ma/(Za*R*288.15)           #density of standard air

    #Eq 4 with (T,P,xw) = (293.15, 1333, 1)
    ρws  = 1333*Mw/(Zw*R*293.15)             #density of standard water vapor

    # two parts of Eq.4: ρ=ρa+ρw
    ρa   = p*Ma/(Z(T,p,xw)*R*T)*(1-xw)       #density of the dry component of
                                             #the moist air

    ρw   = p*Mw/(Z(T,p,xw)*R*T)*xw           #density of the water vapor component

    nprop = 1 + (ρa/ρaxs)*(naxs-1) + (ρw/ρws)*(nws-1)

    return nprop



# output - modify code below the line to match your needs
##############################################################################
#use this to calculate n at particular conditions
#print("n =",n(0.6328,15,101325,0,450))

#plot n vs µm
λ = np.arange(0.3, 1.691, 0.01)
n1 = n(λ,15,101325,0,450) #dry air, 15 °C, 450 ppm
n2 = n(λ,15,101325,0.5,450) #50% humidity, 15 °C, 450 ppm
n3 = n(λ,15,101325,0,370) #dry air, 15 °C, 370 ppm
n4 = n(λ,26.85,101325,0,450) #dry air, 300K, 450 ppm
plt.rc('font', family='Arial', size='14')
plt.figure(1)
plt.plot(λ, n1-1, label="aire seco, 15 °C, 101325 Pa, 450 ppm CO2")
plt.plot(λ, n2-1, label="50% humedad")
plt.plot(λ, n3-1, label="370 ppm CO2")
plt.plot(λ, n4-1, label="300K (26.75 °C)")
plt.xlabel('Longitud de onda (µm)')
plt.ylabel('n-1')
plt.legend()

t = np.arange(-40, 100.1, 1)
n5 = [None] * len(t)
for i in range(0, len(t)):
    n5[i] = n(0.6328,t[i],101325,0,450)-1 #dry air, 450 ppm @ HeNe wavelength
plt.figure(2)
plt.plot(t, n5, label="aire seco, 101325 Pa, 450 ppm CO2, 632.8 nm")
plt.xlabel('Temperatura (°C)')
plt.ylabel('n-1')
plt.legend()

p = np.arange(80000, 120001, 250)
n6 = n(0.6328,15,p,0,450) #dry air, 15 °, 450 ppm @ HeNe wavelength
plt.figure(3)
```

```
plt.plot(p, n6-1, label="aire seco, 15 °, 450 ppm CO2, 632.8 nm")
plt.xlabel('Presión (Pa)')
plt.ylabel('n-1')
plt.legend()

h = np.arange(0, 1.001, 0.01)
n7 = n(0.6328, 15, 101325, h, 450) #dry air, 15 °, 450 ppm @ HeNe wavelength
plt.figure(4)
plt.plot(h*100, n7-1, label="15 °, 101325 Pa, 450 ppm CO2, 632.8 nm")
plt.xlabel('Humedad (%)')
plt.ylabel('n-1')
plt.legend()

xc = np.arange(0, 2001, 100)
n8 = n(0.6328, 15, 101325, 0, xc) #dry air, 15 °, 450 ppm @ HeNe wavelength
plt.figure(5)
plt.plot(xc, n8-1, label="aire seco, 15 °, 101325 Pa, 632.8 nm")
plt.xlabel('Concentración CO2 (ppm)')
plt.ylabel('n-1')
plt.legend()
```

9.9 Código Python 7. Cálculo del radio terrestre para un elipsoide y cálculo de la desviación en superficie según la latitud del elipsoide.

```
import math
#Introduzco valores de semiejes para un elipsoide, en este caso GRS-80
a=6378137
b=6356752.3

#Introduzco latitud del observador (Norte o Sur)
fi=45
#Aplico ecuación de la Demostración 1
cosfi=math.cos(fi*math.pi/180)
cosficuad=(cosfi)**2
cos_1elemento=cosficuad/(a**2)
sinfi=math.sin(fi*math.pi/180)
sinficuad=(sinfi)**2
sin_1elemento=sinficuad/(b**2)

#Radio en metros o en kilómetros para la latitud elegida
radio_m=1/(math.sqrt(cos_1elemento+sin_1elemento))
radio_km=radio_m/1000

#Error obtenido en la superficie en metros para 1 arcosegundo. (Ecuación 2)
error_en_posición_m=2*math.pi*radio_m/(3600*360)
```

9.10 Código Python 8. Cálculo del índice del índice de refracción y gradiente de refracción de dos puntos.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def n( p_0 , T_0 , z ):
    """
    Índice de refracción dependinete de la presión y temperatura a nivel del
    mar p_0 (en milibares), T_0 (en Kelvin) y la altitud z en metros.

    Válido solo en la troposfera, hasta 12000 m de altitud.

    Implementación de la ecuación (15) del artículo "Study on the vertical
    profile of the refractive index in the troposphere", autores: G. Guo, S. Li.
    International Journal of Infrared and Millimeter waves, Vol. 21, no. 7, 2000.

    """
    n_0 = 1.0002891      #índice de refracción de referencia
    g_0 = 9.79828        #g_0 en ms-2
    μ_div_R = 0.0034845  #cociente μ/R (de la ecuación de los gases ideales)

    return  1 + (273.16/1013.25) * (n_0 - 1) * (p_0/T_0) \
    * np.exp( -μ_div_R * g_0 / T_0 * z )
```

```
def grad_v_n(p_0,T_0,z):
    """
    Argumentos: presión y temperatura en el punto de referencia y la altitud
    deseada.

    Devuelve el módulo del gradiente vertical del índice de refracción en ese
    punto.

    """
    delta_v = 100
    return np.abs( (  n( p_0 , T_0 , z + delta_v ) - n( p_0 , T_0 , z ) ) / delta_v )

def grad_h_n(p_0,p_1,T_0,T_1,z):
    """
    Argumentos: presión y temperatura al nivel del mar en el punto de referencia
    y en un punto mar situadoa 100km horizontalmente en la dirección del máximo
    gradiente horizontal de presión, y la altitud deseada.

    Devuelve el módulo del gradiente horizontal del índice de refracción en ese
    punto.

    """
    delta_h = 100000
    return np.abs( ( n( p_1 , T_1 , z ) - n( p_0 , T_0 , z ) ) / delta_h )

p_0 = 980.0
T_0 = 288.0

z = np.linspace(0,12000,13)

plt.figure(1)
plt.plot( n( p_0 , T_0 , z ) , z , label="p$\mathregular{_{0}}$=980mb, T$\mathregular{_{0}}$=288K")
plt.plot( n( p_0+16 , T_0 , z ) , z , label="p$\mathregular{_{0}}$=996mb, T$\mathregular{_{0}}$=288K")
plt.legend()
plt.xlabel('Índice de refracción')
plt.ylabel('Altitud (m)')
plt.title('Variación del índice de refracción con la altitud')

plt.figure(2)
plt.plot( grad_v_n(p_0,T_0,z) , z , label="p$\mathregular{_{0}}$=980mb, T$\mathregular{_{0}}$=288K")
plt.legend()
plt.xlabel('Gradiente vertical de índice de refracción (m$\mathregular{^{-1}}$)')
plt.ylabel('Altitud (m)')
plt.title('Gradiente vertical de índice de refracción en función de la altitud')

plt.figure(3)
plt.plot( grad_h_n(p_0,p_0+1,T_0,T_0,z) , z , label="0.01 mb/km" )
plt.plot( grad_h_n(p_0,p_0+8,T_0,T_0,z) , z , label="0.08 mb/km")
plt.plot( grad_h_n(p_0,p_0+16,T_0,T_0,z) , z , label="0.16 mb/km")
plt.legend()
plt.xlabel('Gradiente horizontal de índice de refracción (m$\mathregular{^{-1}}$)')
plt.ylabel('Altitud (m)')
plt.title('Gradiente horizontal de índice de refracción en función de la altitud')
```

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS

MÁSTER EN METEOROLOGÍA Y GEOFÍSICA

FLEXIÓN DE LA LITOSFERA PRODUCIDA POR ELEMENTOS GEOLÓGICOS AISLADOS SITUADOS EN DISTINTOS AMBIENTES TECTÓNICOS

Por:

Julián Fiz Barrena

Tutores:

Dra. Yasmina M. Martos Martín

Dr. Manuel Catalán Morollón

Dra. Ana M.ª Negredo Moreno

TRABAJO FIN DE MÁSTER

INDICE

RESUMEN **103**

1. CAPÍTULO 1. Introducción **105**
1.1. Objetivos **106**
1.2. Estructura del trabajo **106**
1.3. Contexto regional y áreas de estudios **106**
1.3.1. Monte submarino Seine **106**
1.3.2. Montes submarinos en el mar de Scotia **108**
1.3.3. Volcán Kilimanjaro **109**

2. CAPÍTULO2. Aspectos geofísicos **111**
2.1. Concepto de litosfera elástica **111**
2.2. Conceptos de isostasia y flexión litosférica **111**

3. CAPÍTULO 3. Datos y Metodología **115**
3.1. Fuentes de datos **115**
3.2. Metodología **115**

4. CAPÍTULO 4. Modelización gravimétrica y flexión litosférica **119**
4.1. Monte submarino Seine **120**
4.2. Montes submarinos en el mar de Scotia **122**
4.3. Volcán Kilimanjaro **124**
4.4. Discusión General **126**

5. CAPÍTULO 5. Conclusiones **129**

REFERENCIAS **131**

ANEXOS 1 . . . . . **135**

ANEXOS 2 . . . . . **139**

ANEXOS 3 . . . . . **143**

ANEXOS 4 . . . . . **147**

RESUMEN

Las anomalías gravimétricas constituyen un indicador muy sensible de las propiedades flexurales de la litosfera. Estas propiedades son puestas a prueba mediante procesos tectónicos que actúan sobre sus bordes o mediante el depósito de estructuras tipo volcanes o montes submarinos. La respuesta que va a presentar la litosfera ante este tipo de estructuras es diferente en función de si es continental u oceánica y condicionada en función de su edad y contexto tectónico.

En este trabajo se propone caracterizar los parámetros litosféricos más representativos en dos ambientes geológicos completamente diferentes: un entorno continental que se localiza en el Rift de África Oriental y dos entornos oceánicos que se localizan en la región oriental del Océano Atlántico y región occidental del Mar de Scotia; y se considerará el modelo de placa continua.

En ambos casos y al objeto de aislar el efecto de carga originado por el volcán o monte submarino, se han escogido dos situaciones en la que los efectos tectónicos puedan considerarse inexistentes, como en márgenes oceánicos pasivos o como podría ocurrir en un volcán situado sobre una litosfera continental antigua.

Se llevará a cabo la utilización de datos geofísicos como batimetría, topografía y anomalías de gravedad de Aire Libre procedentes de diferentes bases mundiales de datos públicos.

Para la obtención de los modelos de flexión litosférica, se procederá a una modelización directa 2D ¾ de la anomalía gravimétrica de Aire Libre y de la topografía/batimetría, haciendo uso del software Oasis Montaj de Geosoft y del programa LithoFLEX para el estudio de los parámetros de la flexión en 3D.

Finalmente, se evidencia un adelgazamiento litosférico en las regiones estudiadas debido a la existencia de corrientes astenosféricas en los entornos oceánicos y a la presencia de una tectónica fanerozoica (~ 542 Ma) para el entorno continental. Todas estas evidencias se apoyan en estudios previos realizados en dichas áreas.

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

Los fenómenos volcánicos son manifestaciones externas de la energía interior de nuestro planeta que han contribuido, entre otros factores, a la actual distribución de los continentes y océanos. Existen volcanes localizados tanto en regiones continentales como oceánicas.

Los montes submarinos son volcanes submarinos activos o extintos con alturas superiores a 100 m (Wessel et al., 2010). Estos montes submarinos son muy comunes en el fondo marino (Figura 1.1). Para cartografiarlos se han usado dos técnicas. La primera de ellas hace uso de la altimetría satelital, permitiendo una cobertura del fondo oceánico para latitudes comprendidas entre los 72º N y los 72º S (Wessel, 2001). La segunda técnica hace uso de barcos con sistema de ecosonda multihaz o vehículos submarinos remolcados/autónomos que permiten cartografiar el fondo marino en alta resolución, permitiendo así reconocer los montes submarinos que no estén completamente cubiertos por sedimentos (Buchs et al., 2015).

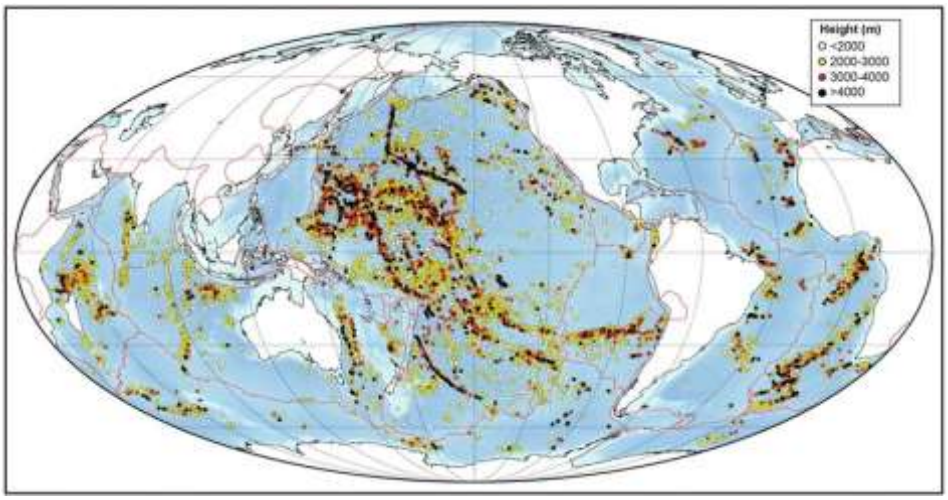


Figura 1.1: Distribución global de montes submarinos (de Buchs et al., 2015).

Estudios previos llevados a cabo en diferentes zonas de la Tierra como en África Oriental (Tessema y Antoine, 2003), África (Pérez-Gussinyé et al., 2009), Hawái (Watts et al., 1989) y las Islas Canarias (Watts, 1994; Watts et al., 2006) ponen de manifiesto que los volcanes son de gran utilidad para el estudio de la flexión litosférica. Asimismo, la utilización de datos geofísicos como batimetría, topografía y anomalías gravimétricas son esenciales para su modelización y caracterización.

En el presente trabajo se ha realizado un estudio relacionando la carga que supone un volcán en dos ambientes geológicos distintos, un entorno oceánico y uno continental. Para el entorno oceánico se han seleccionado dos casos, un monte submarino localizado sobre una de las cortezas más antiguas del Océano Atlántico de ~ 170 Ma, y otro para dos montes submarinos vecinos localizados en el Mar de Scotia sobre una corteza joven de ~ 20 Ma (Muller et al., 2008). Para el entorno continental se ha elegido un volcán situado en el Rift de África Oriental.

1.1. Objetivos

El objetivo principal de este trabajo es estudiar, analizar e interpretar la flexión que se produce en la litosfera como consecuencia de la carga que ejerce una estructura volcánica ubicada en diferentes ambientes geológicos, una corteza continental y otra oceánica, aplicando diferentes métodos que expresan la relación existente entre todos los procesos acaecidos en las zonas de estudio. A continuación, se detallan los objetivos específicos:

- Procesar e interpretar datos de topografía, batimetría y gravedad.
- Modelizar la estructura superior de la litosfera.
- Caracterizar la flexión litosférica.
- Calcular el espesor elástico (T_e) de la litosfera.
- Interpretar los resultados en el contexto regional de las áreas de estudio.

1.2. Estructura del trabajo

Este trabajo se ha estructurado en cinco capítulos y un anexo. En el primer capítulo se da una visión general e introducción, marcando los objetivos a seguir y el contexto regional en el que se desarrolla el trabajo. El segundo capítulo engloba los aspectos geofísicos de litosfera elástica, así como los conceptos de isostasia y flexión litosférica. En el tercer capítulo se muestran las fuentes de datos y la metodología seguida. En el cuarto capítulo se lleva a cabo la modelización gravimétrica y la flexión litosférica de las áreas estudiadas; realizándose una discusión general de los resultados obtenidos comparándolos con estudios previos. En el quinto capítulo se detallan las conclusiones derivadas del presente trabajo. En el apartado anexos, se muestran dos superficies, la flexionada como respuesta a la carga del monte submarino/volcán y la de discontinuidad generada a partir de los datos de gravedad; también la topografía y anomalías de Aire Libre de las diferentes áreas de estudio, así como los códigos generados en MATLAB para el cálculo del T_e y el cálculo de errores.

1.3 . Contexto regional y áreas de estudio

1.3.1 Monte submarino Seine

El monte submarino Seine se localiza en la región oriental del Océano Atlántico (33.74º N y 14.38º O) y a 265 km al NE de Funchal (Madeira) (Figuras 1.2 y 1.3). Este monte submarino se eleva sobre el lecho marino a más de 4000 metros de profundidad hasta aproximadamente 50/100 metros por debajo del nivel del mar.

El archipiélago de Madeira se encuentra en la terminación SO de un amplio cinturón de montes submarinos. Este cinturón se divide en un complejo volcánico con tendencia NE-SO denominado Madeira-Tore Rise (MTR) de aproximadamente 1000 km de largo y otro complejo volcánico que corresponde a las provincias volcánicas de Madeira, siendo un ejemplo de vulcanismo intraplaca en un entorno oceánico que resulta, de acuerdo con Geldmacher y Hoernle (2000) de la acción de puntos calientes (hot spots). A su vez, la terminación NE de la MTR atraviesa la zona de fractura de Azores-Gibraltar, límite de la

placa africana y euroasiática (Geldmacher et al., 2005; 2006; Geldmacher y Hoernle, 2000).

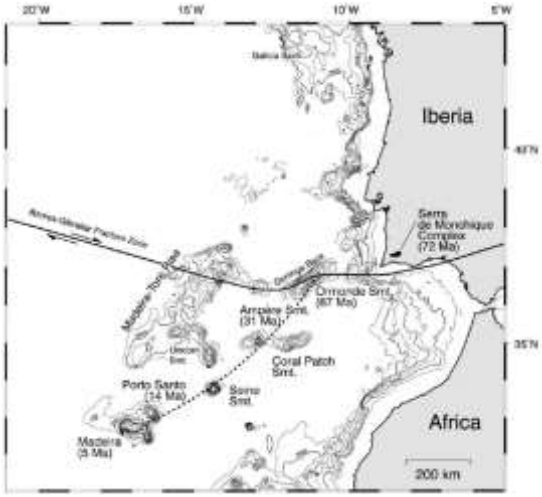


Figura 1.2: Mapa batimétrico de montes submarinos e islas situados en la zona del Atlántico Norte Oriental. La línea de puntos muestra la trayectoria de hot spot (modificado de Geldmacher y Hoernle, 2000).

Cabe destacar que Geldmacher y Hoernle (2000) y Geldmacher et al. (2005) concluyen que la hipótesis del hot spot proporciona la mejor explicación sobre el origen de las principales cadenas volcánicas dada la progresión de edades mostrada por las muestras volcánicas tomadas en las islas y montes según se muestra en la Figura 1.2.

Asimismo, el estudio de Catalán et al. (2019) muestra la influencia del hot spot como causa de un debilitamiento litosférico facilitado por la existencia de un canal astenosférico entre el Archipiélago Canario y el Golfo de Cádiz. La Figura 1.3 muestra la localización de la zona de estudio.

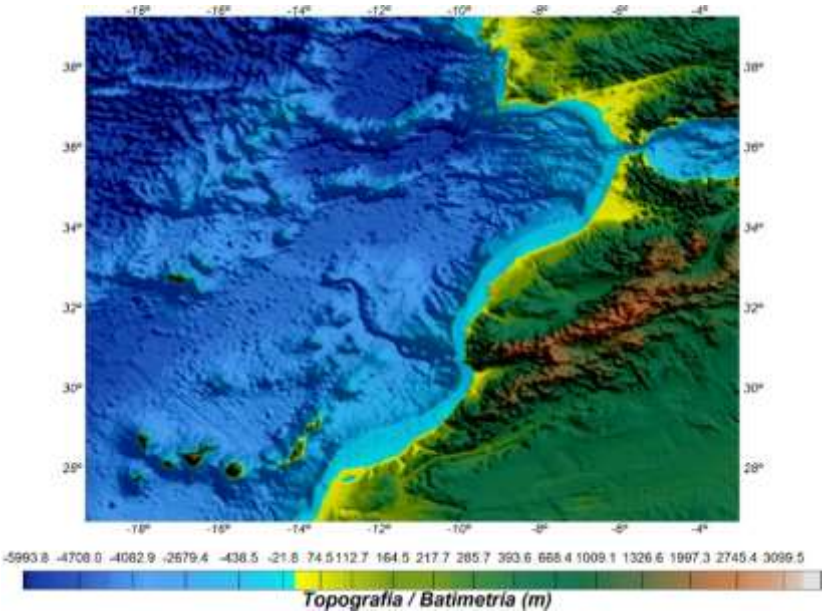


Figura 1.3: Modelo digital del terreno SRTM30_Plus V7.0 (Jones et al., 2010). El recuadro blanco muestra el área de estudio. Flecha de color naranja indica la localización del monte submarino Seine.

1.3.2 Montes submarinos en el Mar de Scotia

El desarrollo del Arco de Scotia, entre las placas Sudamericana y Antártica (Figura 1.4), constituye el principal evento tectónico ocurrido en el suroeste Atlántico a partir del Oligoceno (Bohoyo et al., 2007). La conexión continental entre la Península Antártica y Sudamérica desapareció con el desarrollo del Arco de Scotia y como consecuencia se produce la dispersión de bloques continentales, a lo largo de la placa de Scotia (Barker, 2001; Livermore et al., 2005, 2007; Martos et al., 2014).

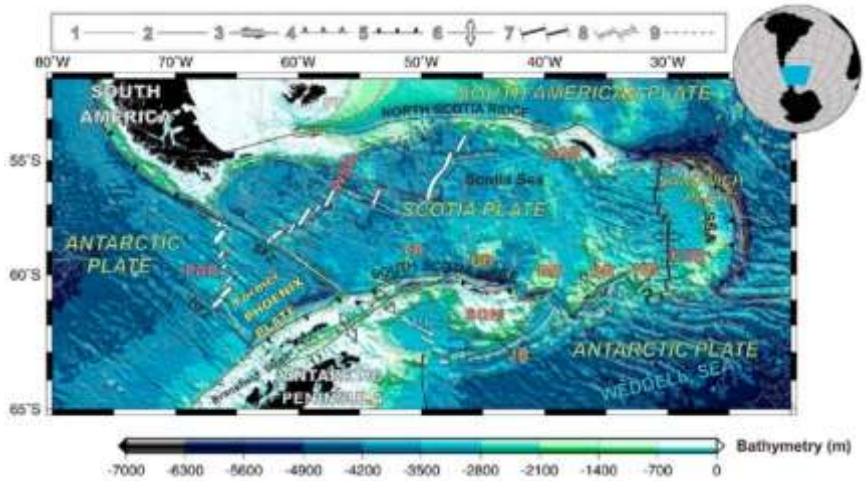


Figura 1.4: Esquema general de los principales elementos tectónicos y geográficos del Mar de Scotia: 1) falla transformante inactiva; 2) falla transformante activa; 3) sentido de movimiento; 4) subducción inactiva; 5) subducción activa; 6) eje de expansión; 7) dorsal de expansión oceánica activa; 8) dorsal de expansión oceánica inactiva; 9) límite corteza oceánica-continental. PAR) Phoenix–Antartic Ridge; BB) Bruce Bank; DB) Discovery Bank; ESR) East Scotia Ridge; FI) Falkland Islands; SFZ) Shackleton Fracture Zone; HB) Herdman Bank; JB) Jane Bank; PB) Pirie Bank; Pbs) Powell Basin; SGB) South Georgia Bank; SOM) South Orkney Microcontinent; SSA) South Shetland Arc; TR) Terror Rise; WSR) West Scotia Ridge (de Martos et al., 2014).

La parte interna de este arco tectónico está formada por dos placas menores, la placa de Scotia y la de Sandwich. La placa de Scotia se encuentra localizada al SE de Sudamérica y está formada en su mayoría por litosfera oceánica. En el límite O de la placa de Scotia se sitúa la Zona de Fractura de Shackleton (ZFS), zona de falla activa de desgarre con orientación NO-SE que adecua, junto con la Dorsal Sur de Scotia, el movimiento relativo entre las placas Antártica y de Scotia. El límite E se encuentra determinado por la subducción de la placa de Sudamérica bajo la de Sandwich (Figura 1.5) (Larter et al., 2003; Livermore, 2003; Yamin y Anselmi, 2020).

Figura 1.5: Interacción de las placas tectónicas. Límite occidental divergente (placas de Scotia y Sandwich) y límite oriental convergente (placa de Sandwich y Sudamericana) (de Yamin y Anselmi, 2020).

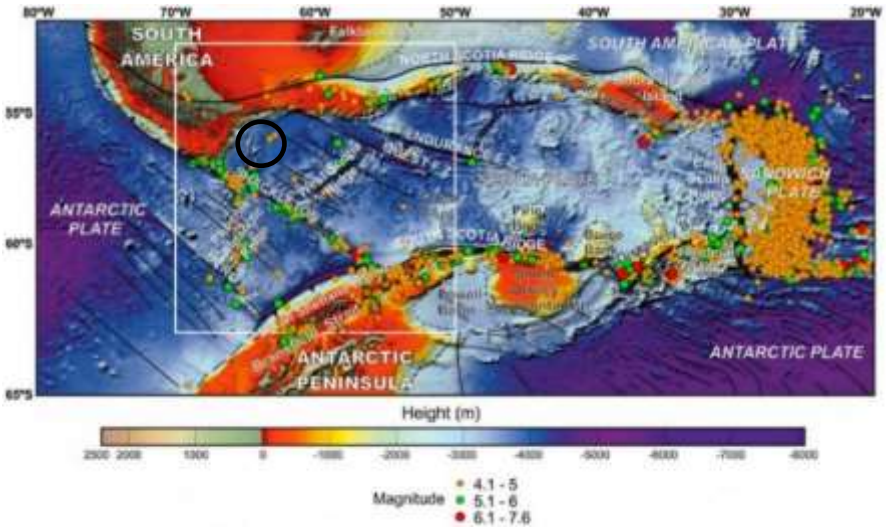


Figura 1.6: Distribución de terremotos a lo largo de los límites que rodean a la placa de Scotia. El recuadro de color blanco señala el área de estudio. El círculo de color negro señala los dos montes submarinos objetos de estudio (modificado de Bohoyo et al., 2019).

1.3.3 Volcán Kilimanjaro

El Kilimanjaro es la montaña más alta de África con una altura máxima de 5895 m. Es un estratovolcán compuesto de tres volcanes, dos de los cuales son volcanes extintos (Shira y Mawenzi) y uno inactivo (Kibo). Se localiza en el Rift de África Oriental, aproximadamente a unos 420 km al sureste del Lago Victoria. Este rift comenzó en Etiopía a finales del Oligoceno (aproximadamente hace 30 Ma) y se propagó hacia el sur, llegando a Kenia en el Mioceno y al norte de Tanzania en el Plioceno. Cabe destacar que incluye tres procesos geológicos discretos: fallas, vulcanismo y formación de pequeñas cuencas sedimentarias.

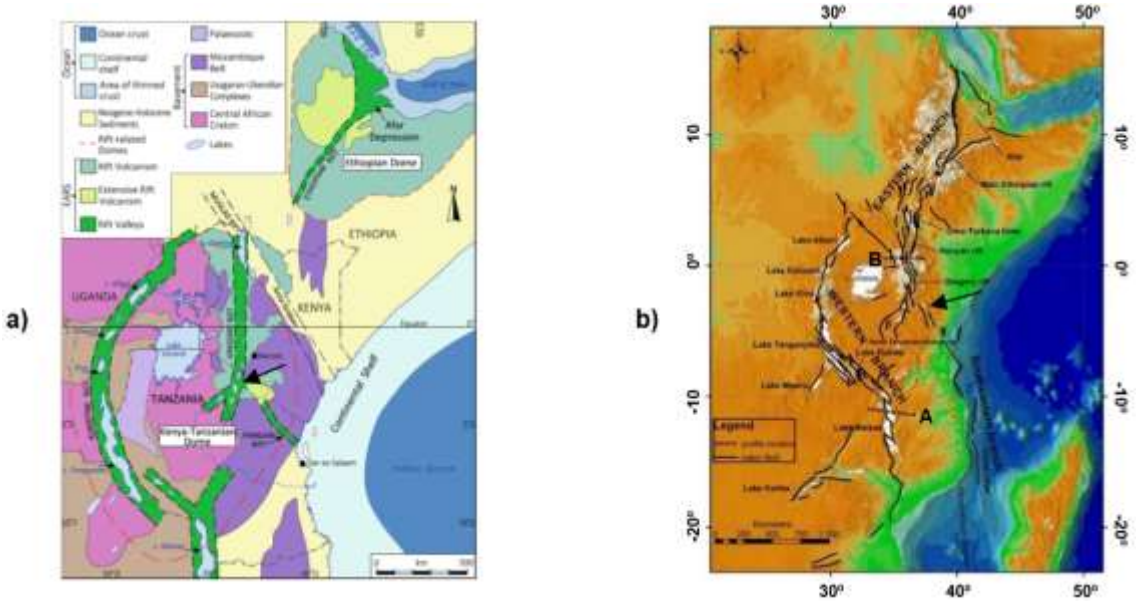


Figura 1.7: (a) Mapa geológico simplificado de África Oriental. La flecha de color negro señala la ubicación del Kilimanjaro (modificado de Scoon, 2018). (b) Modelo digital de elevación del Rift de África Oriental. Las líneas negras señalan las fallas principales. La flecha de color negro señala la ubicación del Kilimanjaro (modificado de Chorowicz, 2005).

Las fases más antiguas de actividad volcánica comenzaron aproximadamente hace unos 2.5 Ma en el volcán Shira. La actividad magmática posteriormente se desplazó hacia el este hacia los centros de Mawenzi y Kibo, donde el vulcanismo inicial está fechado aproximadamente en 1 Ma. Las rocas más recientes de Mawenzi están datadas aproximadamente en unos 448 Ka y, las rocas más antiguas de Kibo (obtenidas a 4600 m de altitud) están datadas en 482 Ka. A su vez, las últimas edades obtenidas para los principales episodios de actividad volcánica en Kibo parecen coincidir con las glaciaciones Cuaternarias conocidas. La última gran erupción (que puede observarse en la formación del cráter localizado en la cumbre del Kibo) ocurrió hace aproximadamente 200-150 Ka (Nonnotte et al., 2008).

El Rift se compone de dos ramas principales (oriental y occidental) y una tercera rama que se localiza en el Canal de Mozambique (Figura 1.7b). La rama oriental se extiende una distancia de 2200 km desde el triángulo de Afar (triple unión entre las placas africana, arábiga y somalí) hasta la divergencia del norte de Tanzania. Esta divergencia hace referencia a una grieta al sur de Kenia con tres ramas principales: lago Eyasi, lago Manyara y alargadas llanuras al sur del Kilimanjaro. La rama occidental se extiende una distancia de 2100 km desde el lago Albert en el norte hasta el lago Malawi y Kariba en el sur. Finalmente, la rama sureste comprende cuencas submarinas localizadas al oeste del ridge de Davie (Chorowicz, 2005). En la Figura 1.8 se muestra el área de estudio.

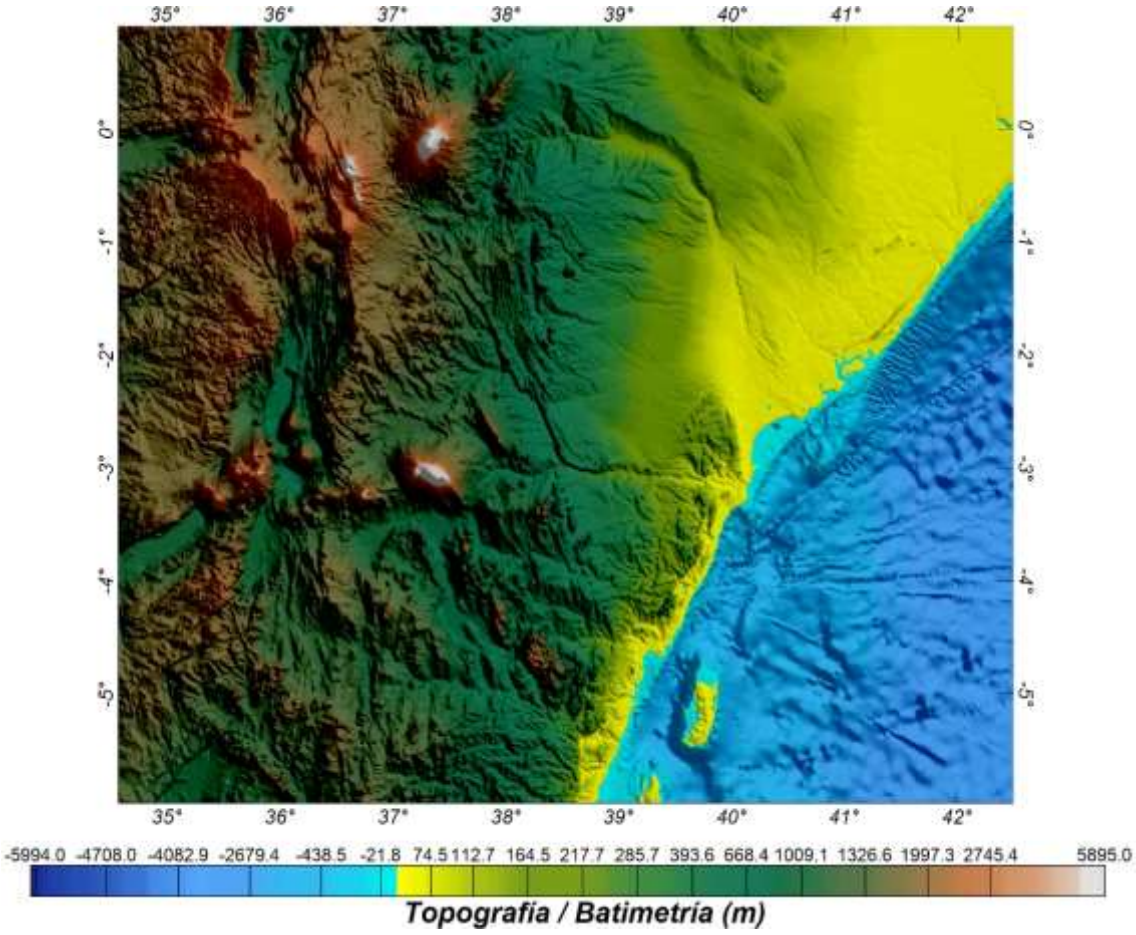


Figura 1.8: Modelo digital del terreno SRTM30_Plus V7.0 (Jones et al., 2010). El recuadro blanco muestra el área de estudio. La flecha de color naranja muestra la ubicación del volcán Kilimanjaro.

CAPÍTULO 2. ASPECTOS GEOFÍSICOS

Este capítulo engloba los conceptos teóricos tratados en este trabajo, necesarios para su comprensión.

2.1. Concepto de litosfera elástica

Los términos litosfera, en sentido moderno, y astenosfera fueron introducidos por primera vez por Barrell (1914 a, b, c). El autor define la litosfera como la capa exterior resistente de la Tierra capaz de soportar cargas y que reposa sobre una capa débil de fluido denso, la astenosfera.

Desde finales del S.XX, se usa el término litosfera para denominar la capa externa de la Tierra capaz de deformarse para soportar aquellas tensiones que son generadas por cargas geológicas. En la actualidad, a esta capa se la denomina litosfera elástica o flexural. Este término explica diferentes situaciones de deformación como las que ocurren en montes submarinos, zonas de subducción y procesos de sedimentación (Turcotte y Schubert, 2002; Watts, 2001).

2.2. Conceptos de isostasia y flexión litosférica

El término de isostasia procede del griego “iso” (igual) y “stasis” (estabilidad) cuya traducción es “estado de equilibrio”. Hace referencia al equilibrio que se alcanza entre la corteza terrestre y el manto en ausencia de fuerzas perturbadoras.

La isostasia hay que considerarla como una tendencia hacia el equilibrio de flotación de la corteza sobre el manto más denso. En realidad, este equilibrio sólo se alcanza teóricamente a nivel de la superficie del geoide. Existen dos factores que esencialmente impiden que esto ocurra en realidad. Estos son los procesos que tienen lugar en el interior de nuestro planeta como consecuencia de su energía térmica y la gran rigidez de la corteza (García Cruz, 1998).

Los primeros modelos de compensación isostática fueron propuestos por Airy y Pratt (1855), en ambos casos la corteza es representada mediante bloques que flotan en equilibrio en el manto. Los dos modelos son modelos de compensación local y son idealizaciones ya que no tienen en cuenta la existencia de esfuerzos tangenciales que se dan en el interior de la corteza (Udías y Mezcua, 1986).

Un modelo más realista es el descrito por el geofísico holandés Vening Meinesz, conocido como modelo de isostasia regional o de flexión litosférica en el que la litosfera actúa como una placa elástica, distribuyendo las cargas topográficas lateralmente sobre una región. En la actualidad este modelo es el más utilizado.

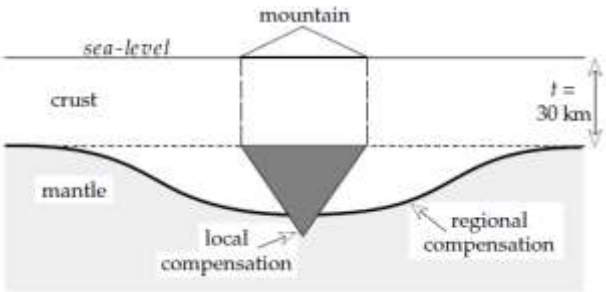


Figura 2.1: Compensación isostática regional según el modelo de placa elástica de VENING MEINESZ (modificado de Lowrie y Fichtner, 2020).

El modelo de flexión de una placa elástica presenta dos parámetros importantes, el espesor elástico (T_e) y la rigidez flexural (D). El T_e está definido como el espesor de la placa que se comporta elásticamente y que va a soportar parte o toda la carga topográfica (Burov y Diament, 1995). D es definida como la medida de la resistencia de la litosfera a la flexión. Viene dada por la siguiente expresión:

$$D = \frac{E{T_e}^3}{12(1-\nu^2)} \qquad \text{ec. 2.1}$$

donde E es el módulo de Young y ν es el coeficiente de Poisson.

La litosfera descansa sobre una astenosfera fluida. Valores altos de espesor elástico incrementan la capacidad de la litosfera para soportar cargas topográficas sin tener deformación. A continuación, se especifican las expresiones más importantes de los parámetros que caracterizan la flexión litosférica ante la aplicación de una carga (V_0) (Turcotte y Schubert, 2002; Watts, 2001):

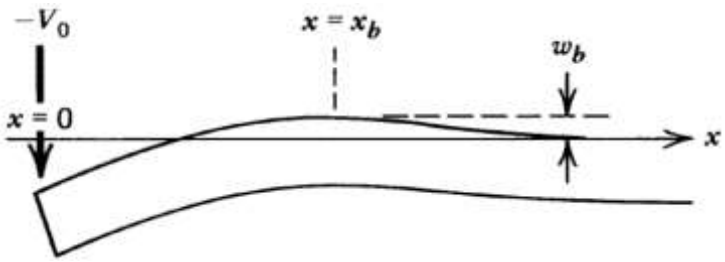


Figura 2.2: Flexión litosférica debida a una carga (V_0) aplicada en el extremo de la placa (modificado de Turcotte y Schubert, 2002).

En base a trabajos previos (Mckenzie y Fairhead, 1997) los valores que se adoptan en este trabajo para el módulo de Young y el coeficiente de Poisson son $E = 1 \cdot 10^{11}\ Pa$ y $\nu = 0.25$.

- Parámetro flexural (α) representa la longitud de onda de la deformación de la placa.
    a) Entorno oceánico:

$$\alpha = [\frac{4D}{g(\rho_m - \rho_w)}]^{1/4} \qquad \text{ec. 2.2}$$

donde ρ_m y ρ_w son la densidad del manto y del agua, respectivamente.

b) Entorno continental:

$$\alpha = [\frac{4D}{g(\rho_m - \rho_c)}]^{1/4} \qquad \text{ec. 2.3}$$

donde ρ_c es la densidad de la corteza.

- Máximo hundimiento de la litosfera (w_0) se localiza en $x = 0$ y se representa como:

$$w_0 = \frac{V_0 \alpha^3}{8D} \qquad \text{ec. 2.4}$$

V_0: Carga en $x = 0$.

- Localización del máximo levantamiento producido por la flexión o bulge (x_b) viene dada por:

$$x_b = \pi\alpha \qquad \text{ec. 2.5}$$

- Máximo levantamiento o altura del bulge (w_b):

$$w_b = -0.0432 w_0 \qquad \text{ec. 2.6}$$

A continuación, se muestran los modelos teóricos de flexión litosférica, el modelo simple de anomalía de Aire Libre y la flexión litosférica en monte submarino o isla oceánica:

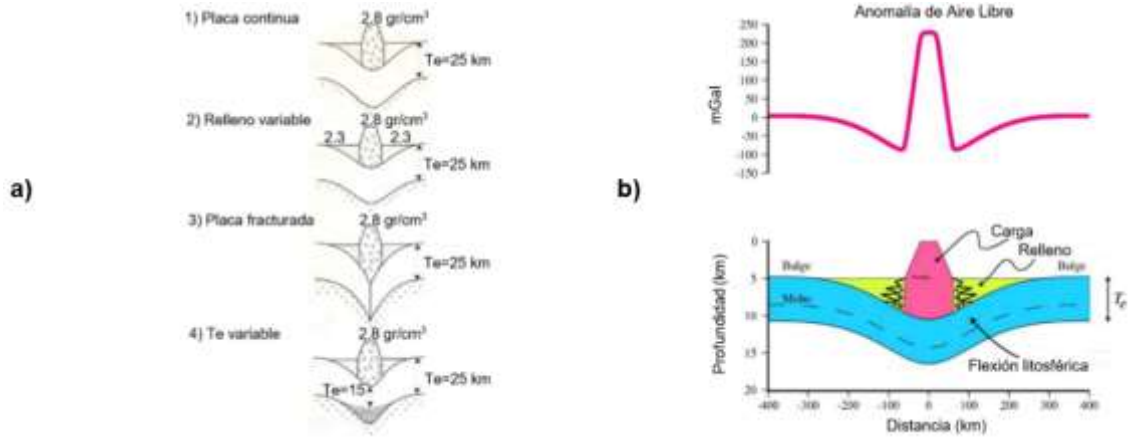


Figura 2.3: (a) Modelos teóricos de flexión litosférica. (b) Modelo simple para la anomalía de Aire Libre y flexión litosférica para un monte submarino o isla oceánica (modificado de Watts, 2001).

En la Figura 2.3a se detallan los modelos teóricos de flexión litosférica propuestos por Watts (2001). 1) Flexión que produce una placa continua con un espesor elástico constante y densidad para la carga constante. 2) Flexión producida en una placa continua con espesor elástico constante y densidad variable para el material que rellena la flexión. 3) Flexión que se produce en una placa fracturada con espesor elástico y densidad para la carga constante. 4) Placa continua con espesor elástico variable y densidad para la carga constante. La Figura 2.3b muestra el modelo simple de anomalía de Aire Libre y flexión litosférica de un monte submarino o isla oceánica.

CAPÍTULO 3. DATOS Y METODOLOGÍA

En este capítulo se describen el origen de los distintos datos utilizados y la metodología llevada a cabo a lo largo del trabajo. Se han utilizado principalmente dos tipos de datos: gravimétricos y de topografía/batimetría.

3.1. Fuentes de datos

A continuación, se detallan las fuentes y los datos utilizados:

Fuentes	Datos
Modelo CRUST 1.0 (Laske et al., 2013) (1º de resolución)	Profundidad del Moho. Densidad corteza oceánica superior/inferior. Densidad corteza continental. Densidad manto litosférico. Espesor de sedimentos (entorno continental).
Straume et al., 2019 (1º de resolución)	Espesor de sedimentos (entorno oceánico).
Sandwell et al., 2014 (0.016666º de resolución)	Anomalías de gravedad de Aire Libre zona oceánica.
Pavlis et al., 2012 (0.008333º de resolución)	Anomalías de gravedad de Aire Libre zona continental.
GEBCO (0.0045º de resolución)	Batimetría región monte submarino Seine.
Bohoyo et al., 2019 (0.0018º de resolución)	Batimetría montes submarinos en el Mar de Scotia.
SRTM30_Plus V7.0 (Jones et al., 2010) (0.008333º de resolución)	Topografía zona volcán Kilimanjaro.

Tabla 3.1: Descripción de las fuentes y relación de datos utilizados.

3.2. Metodología

El estudio del campo gravitatorio (g) permite determinar los contrastes de densidad en el interior de la Tierra. Medir densidades en profundidad no resulta una tarea sencilla, pero llevar a cabo mediciones de gravedad en la superficie terrestre es relativamente más sencillo para determinar contrastes laterales de densidad. Por ello, estos contrastes nos van a proporcionar una valiosa información sobre la composición del interior terrestre. Si la Tierra presentara forma esférica perfecta, estática y densidad homogénea, ejercería una atracción gravitatoria constante sobre un cuerpo localizado en superficie; pero si la forma esférica variase (radio de la Tierra variable) junto a cambios en la densidad, daría como resultado que el campo gravitatorio también cambiaría. La realidad es que el campo gravitatorio varía de unos puntos a otros de la Tierra ya que su forma real, sin tener en cuenta la topografía, se va a asemejar a un geoide (nombre de la forma de la Tierra),

definido como la superficie equipotencial del campo gravitatorio terrestre que a su vez coincide con la superficie del nivel medio de los mares (Udías y Mezcua, 1986). Su forma también se ve alterada por su movimiento de rotación, su relieve y sus variaciones internas de densidad. De manera análoga a la definición que mejor se adapta a la forma real de la Tierra y dada la complejidad que presenta la definición matemática del geoide puede definirse como un elipsoide de referencia para el campo de la gravedad de la Tierra. Para ello, además de los parámetros geométricos, achatamiento de los polos y eje mayor, se precisa de la masa de la Tierra, así como de su velocidad angular w**,** como parámetros físicos. Con todo ello, la Unión Geodésica y Geofísica Internacional (UGGI) define la fórmula de gravedad internacional como:

$$g_n(\varphi) = 9.780327(1 + \beta sen^2\varphi - \gamma sen^2 2\varphi)\ m \cdot s^{-2} \qquad \text{ec. 3.1}$$

donde g_n es el valor de la gravedad normal o teórica a nivel del mar, β presenta un valor de $5.30244 \cdot 10^{-3}$ y $-5.8 \cdot 10^{-6}$ para γ, siendo ambas constantes. Esta fórmula es muy importante en el análisis de las mediciones de la gravedad en la Tierra, porque proporciona la variación teórica de la gravedad normal con la latitud φ en la superficie del elipsoide de referencia (Lowrie y Fichtner, 2020).

El método gravimétrico consiste en comparar la gravedad observada en una serie de puntos de la superficie terrestre con la gravedad teórica (ec. 3.1), dando lugar a la anomalía gravimétrica. Para llevar a cabo su obtención hay que realizar una serie de correcciones. En este trabajo se hace uso de la corrección de Aire Libre:

- Corrección de Aire Libre (C^{AL}): Esta corrección es debida a la variación de la gravedad con la altitud.

  $$C^{AL} = 0.3086\ h\ (mGal) \qquad \text{ec. 3.2}$$

  h: altura en metros sobre el nivel del mar. Por tanto, la anomalía de Aire Libre es:

  $$Ag_{AL} = g_{obs} - g_{teo} + C^{AL} = g_{obs} - g_{teo} + 0.3086h\ mGal \qquad \text{ec. 3.3}$$

  Que indica cuánto se aleja la medida observada de gravedad (g_{obs}) de la medida teórica (g_{teo}) al aplicarle la corrección de Aire Libre.

Como se ha comentado anteriormente, las anomalías gravimétricas indican la diferencia entre el valor de la gravedad observada y la gravedad teórica. Estas diferencias son generadas por las variaciones laterales de densidad de los materiales que forman la corteza o por la diferencia de altitud de los puntos de medida. Esta altitud que se añade para corregir la diferencia entre la gravedad observada y la teórica da como resultado la anomalía gravimétrica de Aire Libre (ec. 3.3), que es muy útil para determinar estructuras. Por ello, se ha escogido la anomalía gravimétrica de Aire Libre para la elaboración de los diferentes modelos de estructura superior de la litosfera.

Se han utilizado datos de gravedad del modelo EGM2008 (Pavlis et al., 2012) y el modelo digital del terreno SRTM30_Plus V7.0 para el entorno continental. Para el entorno oceánico, se han empleado datos de gravedad de satélite (Sandwell et al., 2014) y se ha

llevado a cabo el cálculo de la topografía equivalente a roca (Hirt et al., 2012). La topografía equivalente a roca (RET por sus siglas en inglés) es una representación de la topografía que comprime las zonas de batimetría y hielo en capas equivalentes a la densidad de la roca topográfica, manteniendo constantes las masas de agua y hielo (Figura 3.1). (Ver Anexo 2).

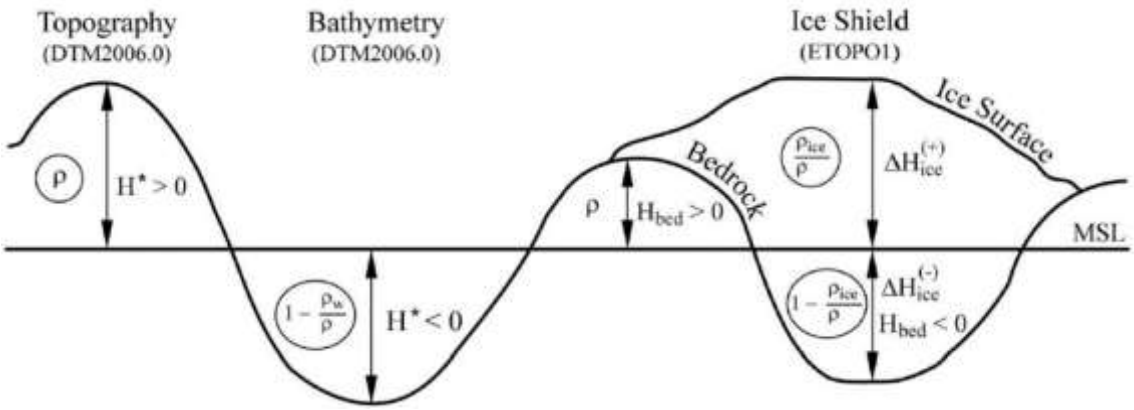


Figura 3.1: Tipos de terreno usados para construir las alturas topográficas equivalentes (de Hirt et al., 2012).

Se ha calculado la topografía equivalente a roca para las zonas bajo el nivel del mar, convirtiendo el espesor de agua en espesor de roca.

Para el entorno oceánico y continental se transforman las profundidades y elevaciones usando:

$$H = \begin{cases} H^* \left(1 - \frac{\rho_w}{\rho}\right) & H^* < 0 \\ H^* & H^* \geq 0 \end{cases} \qquad \text{ec. 3.4}$$

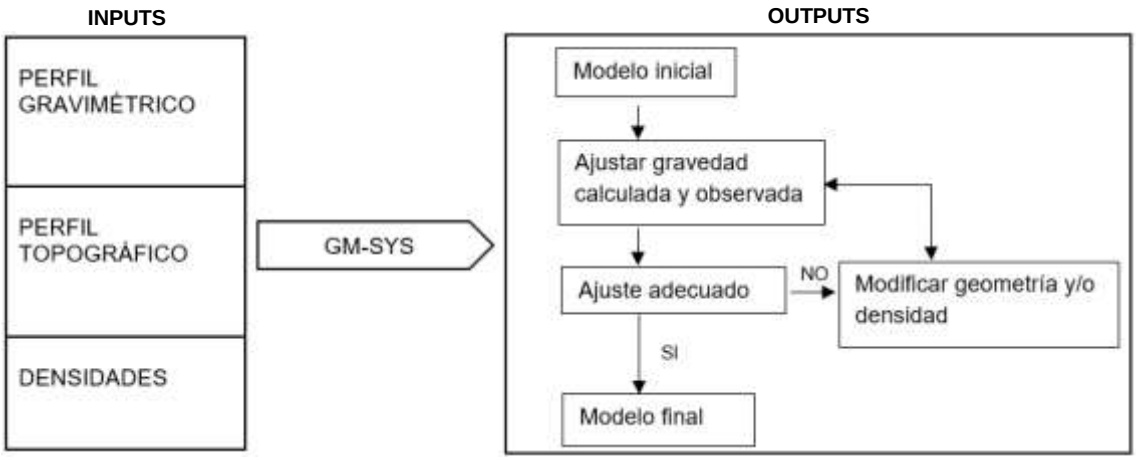
ρ_w corresponde a la densidad media del agua, ρ es la densidad media de las rocas, $H^* < 0$ es la batimetría y $H^* \geq 0$ la topografía.

Esta reducción de las profundidades por el factor $1 - {}^{\rho_w}/_{\rho}$ comprime el agua en un espesor equivalente de roca.

CAPÍTULO 4. MODELIZACIÓN GRAVIMÉTRICA Y FLEXIÓN LITOSFÉRICA

En este capítulo se presentan los distintos modelos de estructura superior de la litosfera basados en datos gravimétricos. Estos modelos muestran la gravedad calculada que mejor se ajusta a la señal observada de gravedad. Para ello, se ha utilizado el programa Oasis Montaj que permite importar, procesar y analizar de manera eficaz datos geofísicos, geológicos y geoquímicos de gran volumen dentro de un entorno integrado.

Para generar los modelos de estructura superior de la litosfera y de flexión litosférica se ha usado el módulo GM-SYS de Oasis Montaj, con el que se han realizado modelizaciones directas de perfiles 2D ¾. El flujo de trabajo en el proceso de modelización es el siguiente:



Esquema 4.1: Proceso de modelización llevado a cabo en el módulo GM-SYS de Oasis Montaj.

A partir de los modelos finales de estructura superior de la litosfera obtenidos a través de las anomalías de gravedad de Aire Libre, se procede a calcular el espesor elástico T_e de la zona aplicando las ecuaciones del modelo de placa elástica descritas en el Capítulo 2 (ecs. 2.1, 2.2, 2.3 y 2.5) de la siguiente manera:

- Se mide la distancia del centro de la carga (V_0) del monte submarino/volcán a la máxima amplitud de bulge (x_b), obteniendo α (ec. 2.5).
- De la ec. 2.2 para entorno oceánico (monte submarino Seine y montes submarinos del Mar de Scotia) y de la ec. 2.3 para entorno continental (volcán Kilimanjaro) se obtiene la rigidez flexural (D).
- Finalmente, calculamos el espesor elástico T_e de la ec. 2.1.

Una vez obtenido el T_e, se hace uso del programa LithoFLEX. Este programa permite el cálculo directo e inverso de la gravedad en áreas tanto oceánicas como continentales y el cálculo de las superficies de flexión para una carga dada. Haciendo uso de la opción "Gravity Inversion", se obtiene la superficie de discontinuidad (cálculo 3D), con frecuencia coincidente con la discontinuidad del Moho, generada a partir de los valores de anomalía de gravedad de Aire Libre (ver Anexo 1). Por otra parte, usamos la opción "Forward Flexure", en la que se introduce el RET, caso de estudio del monte submarino

Seine y montes submarinos en el Mar de Scotia; y el modelo digital del terreno SRTM30_Plus V7.0 para el estudio del volcán Kilimanjaro. Después se introduce la profundidad media del Moho (profundidad de referencia), el espesor elástico calculado anteriormente y las densidades de la corteza y manto; obteniéndose la superficie flexionada (cálculo 3D) como respuesta a la carga del monte submarino/volcán (ver Anexo 1). A continuación, se detallan los modelos de estructura superior de la litosfera obtenidos en las diferentes áreas estudiadas:

4.1. Monte submarino Seine

Los parámetros utilizados para llevar a cabo la modelización gravimétrica y la flexión litosférica son los siguientes:

Parámetro	**Valor utilizado**
Módulo de Young ($\boldsymbol{E}$)	$1 \cdot 10^{11}\ Pa$
Coeficiente de Poisson ($\boldsymbol{\nu}$)	0.25
Aceleración de la gravedad ($\boldsymbol{g}$)	$9.81\ m/s^2$
Espesor de sedimentos	$1.5\ km$
Densidad del agua ($\boldsymbol{\rho_w}$)	$1030\ kg/m^3$
Densidad de sedimentos	$2000\ kg/m^3$
Densidad media de la corteza ($\boldsymbol{\rho_c}$)	$2800\ kg/m^3$
Densidad del manto ($\boldsymbol{\rho_m}$)	$3350\ kg/m^3$
Profundidad media del Moho	$12\ km$

Tabla 4.1: Descripción de los parámetros y los valores (fuentes de datos, Tabla 3.1) utilizados en el modelo. Los valores de módulo de Young, coeficiente de Poisson y aceleración de la gravedad solo se muestran en esta tabla, ya que son comunes en todos los modelos.

La corteza oceánica se ha dividido en corteza oceánica superior e inferior. La Tabla 4.1 refleja la densidad media de la corteza tomada como referencia para la modelización. Se ha elaborado un perfil N-S (Figura 4.1) y un perfil O-E (Figura 4.2) para el estudio de esta zona. (Ver Anexo 2).

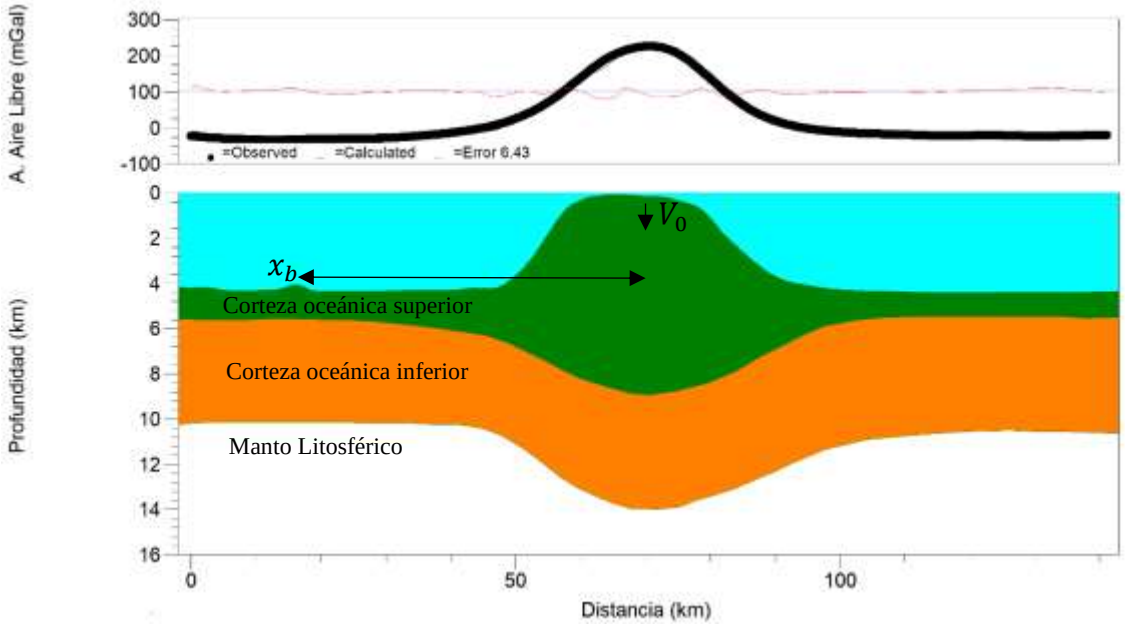


Figura 4.1: Modelo de estructura superior de la litosfera para el perfil N-S. Elaborado en el módulo GM-SYS de Oasis Montaj.

El máximo levantamiento producido por la flexión o bulge (x_b) se mide desde el centro de la carga (V_0) (Watts, 2001; Turcotte y Schubert, 2002). En la Figura 4.1, V_0 se encuentra a 70 km del origen del perfil y el bulge se observa a ~ 16 km del origen del perfil. Los resultados obtenidos en el perfil N-S son los siguientes:

$$x_b = 54000\, m; \alpha = 17188.75\, m; D = 4.97 \cdot 10^{20}\, N \cdot m;\ T_e = 3823.87\, m$$

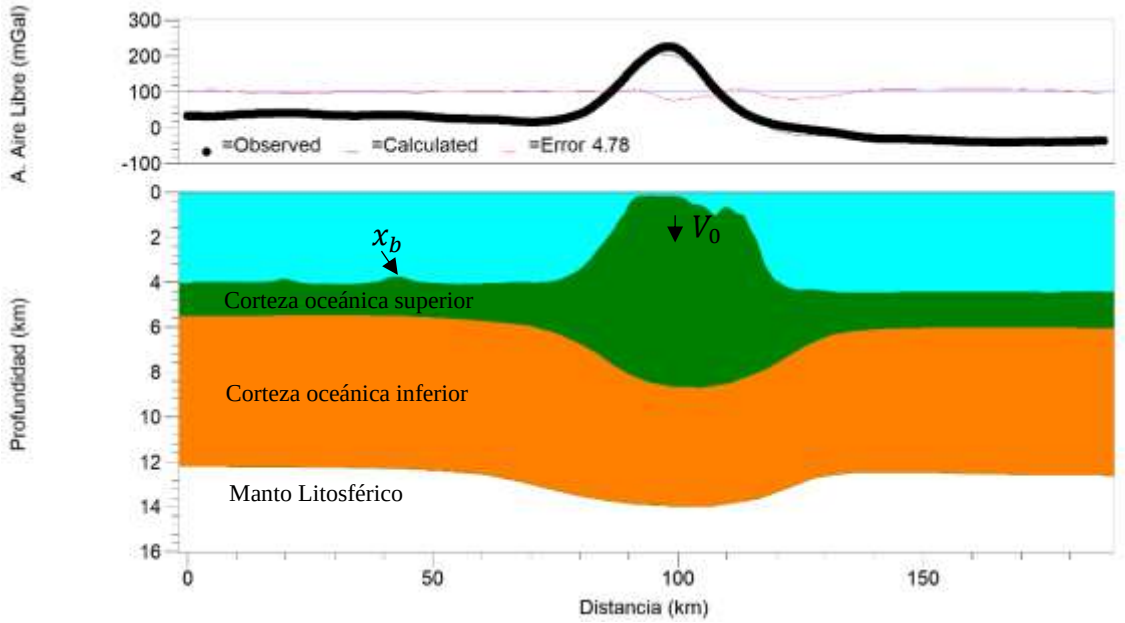


Figura 4.2: Modelo de estructura superior de la litosfera para el perfil O-E. Elaborado en el módulo GM-SYS de Oasis Montaj.

Para el perfil O-E (Figura 4.2), V_0 se encuentra a ~ 102 km del origen del perfil y el bulge se observa a 45 km. Por ello, adoptamos un valor de 57 km para x_b. Siguiendo el

procedimiento expuesto en la introducción de este punto, los resultados para el perfil O-E (Figura 4.2) son:

$$\alpha = 18143.68\, m;\ D = 6.17 \cdot 10^{20}\ N \cdot m;\ T_e = 4109.72\ m$$

El máximo valor de anomalía de Aire Libre es de ~ 225 mGal (Figuras 4.1 y 4.2). Los valores mínimos son ~ -25 mGal (Figura 4.1) y ~ -40 mGal (Figura 4.2). (Ver Anexo 2).

Una vez llevados a cabo los modelos correspondientes al monte submarino Seine (ver Figuras 4.1 y 4.2), se obtienen valores de T_e (3823.87 m para el perfil N-S y 4109.72 m perfil O-E) muy próximos y consistentes, obteniéndose un T_e promedio de 3966.80 m. (Ver Anexo 3).

4.2. Montes submarinos en el Mar de Scotia

Se han seleccionado dos montes submarinos localizados en el Mar de Scotia (Figura 1.6). Los parámetros concernientes a esta zona de estudio son:

Parámetro	**Valor utilizado**
Espesor de sedimentos	0.4 km
Densidad del agua ($\boldsymbol{\rho_w}$)	1030 kg/m^3
Densidad de sedimentos	2000 kg/m^3
Densidad media de la corteza ($\boldsymbol{\rho_c}$)	2800 kg/m^3
Densidad del manto ($\boldsymbol{\rho_m}$)	3300 kg/m^3
Profundidad media del Moho	9.5 km

Tabla 4.2: Descripción de los parámetros y los valores (Fuentes de datos, Tabla 3.1) utilizados en el modelo.

Se ha llevado a cabo un perfil N-S que engloba a ambos montes submarinos (Figura 4.3), así como un perfil O-E que incluye al monte submarino localizado más al N (Figura 4.4) para así aislarlo y estudiarlo separadamente del situado más al S, el cual es analizado y estudiado en otro perfil O-E (Figura 4.5). (Ver Anexo 2).

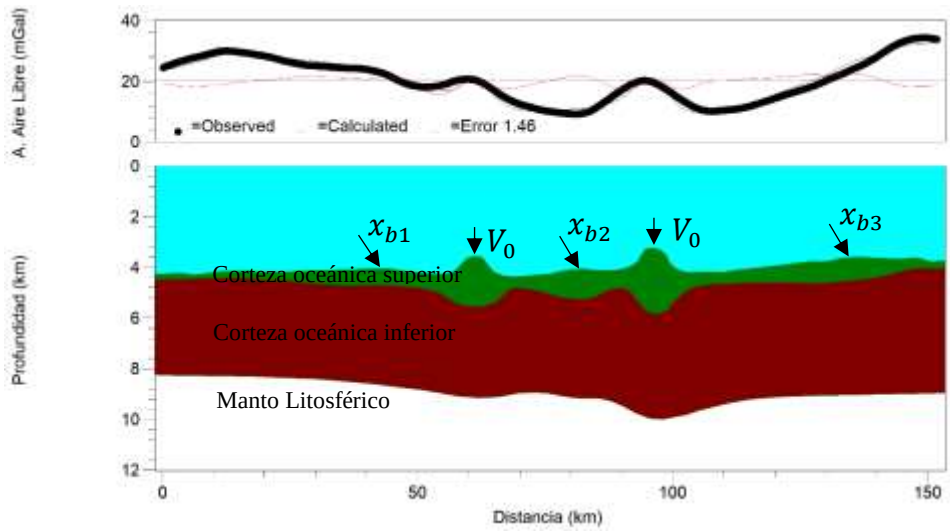


Figura 4.3: Modelo de estructura superior de la litosfera para el perfil N-S que engloba a ambos montes submarinos. Elaborado en el módulo GM-SYS de Oasis Montaj.

Para el perfil N-S (Figura 4.3), la carga V_0 del monte submarino más al N se encuentra a ~ 61.3 km del origen del perfil y el bulge se observa a ~ 43.4 km (x_{b1}). Entre ambos volcanes, el bulge se encuentra a ~ 82 km (x_{b2}). Para el monte submarino localizado más al S, V_0 se encuentra a ~ 96.3 km y el bulge se localiza a 135 km (x_{b3}).

A continuación, se detallan los resultados obtenidos (Figura 4.3):

$$x_{b1} = 17900\ m;\ \alpha = 5697.75\ m;\ D = 5.87 \cdot 10^{18}\ N \cdot m;\ T_e = 870.82\ m$$
$$x_{b2} = 14300\ m;\ \alpha = 4551.84\ m;\ D = 2.39 \cdot 10^{18}\ N \cdot m;\ T_e = 645.43\ m$$
$$x_{b3} = 38700\ m;\ \alpha = 12318.60\ m;\ D = 1.28 \cdot 10^{20}\ N \cdot m;\ T_e = 2432.88\ m$$

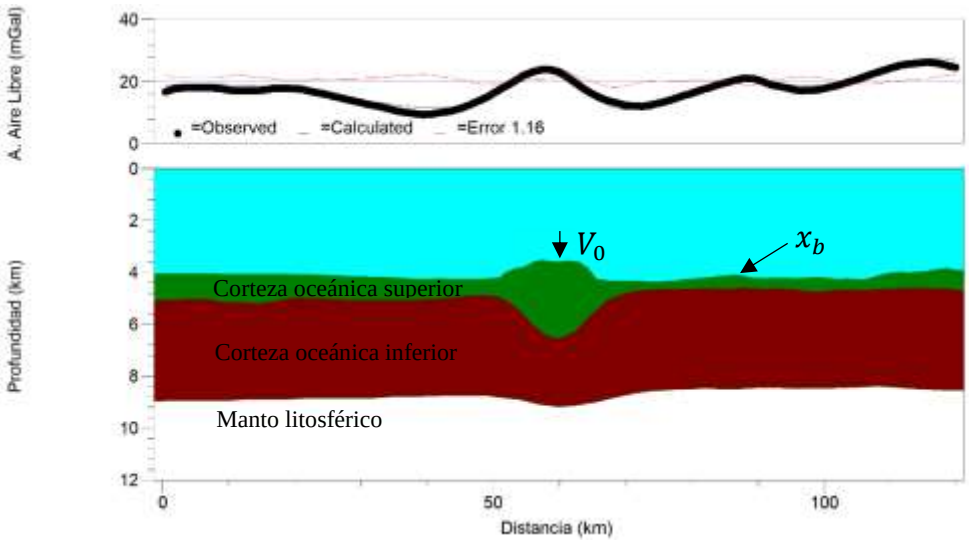


Figura 4.4: Modelo de estructura superior de la litosfera para el perfil O-E correspondiente al monte submarino localizado más al N. Elaborado en el módulo GM-SYS de Oasis Montaj.

V_0 para el perfil O-E de la Figura 4.4 se encuentra a 60 km del origen del perfil y el bulge se sitúa a ~ 86.5 km del origen de dicho perfil.

A continuación, se detallan los resultados obtenidos (Figura 4.4):

$$x_b = 26500\ m;\ \alpha = 8435.22\ m;\ D = 2.82 \cdot 10^{19}\ N \cdot m;\ T_e = 1469.38\ m$$

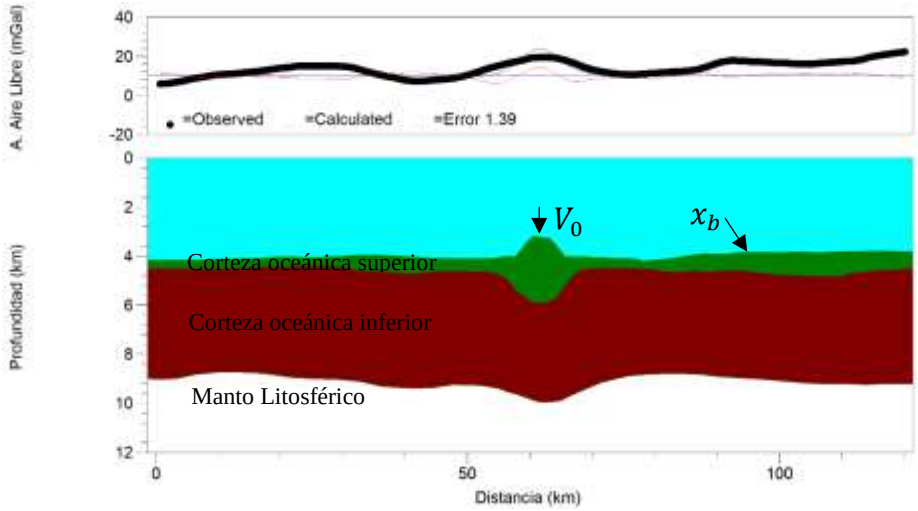


Figura 4.5: Modelo de estructura superior de la litosfera para el perfil O-E correspondiente al monte submarino localizado más al S. Elaborado en el módulo GM-SYS de Oasis Montaj.

V_0 se localiza el perfil O-E de la Figura 4.5 se encuentra a ~ 62 km del origen del perfil y el bulge se sitúa a 95 km del origen de dicho perfil.

A continuación, se detallan los resultados obtenidos (Figura 4.5):

$$x_b = 33000\ m;\ \alpha = 10504.24\ m;\ D = 6.78 \cdot 10^{19}\ N \cdot m;\ T_e = 1968.46\ m$$

En el perfil N-S (Figura 4.3), el máximo valor de anomalía de Aire Libre es de ~ 36 mGal y de ~ 26 mGal (monte submarino situado más al N) y ~ 24 mGal (monte submarino situado más al S) en los perfiles O-E (Figuras 4.4 y 4.5). El valor mínimo de anomalía de Aire Libre es de ~ 8 mGal (perfil N-S y perfil O-E monte submarino más al N) y de ~ 5 mGal para el perfil O-E (monte submarino situado más al S). (Ver Anexo 2).

De acuerdo con los resultados obtenidos en las modelizaciones directas y mostrados en las Figuras 4.3, 4.4 y 4.5, los valores obtenidos de T_e (870.82 m, 645.43 m, 2432.88 m, 1469.38 m y 1968.46 m, según el orden de las figuras) son consistentes y próximos, dando como resultado un T_e promedio de 1477.39 m. (Ver Anexo 3).

4.3. Volcán Kilimanjaro

Los parámetros utilizados para llevar a cabo la modelización gravimétrica, flexión litosférica y cálculo del T_e del volcán Kilimanjaro son los siguientes:

Parámetro	**Valor utilizado**
Espesor de sedimentos	$1\ km$
Densidad de sedimentos	$2100\ kg/m^3$
Densidad de la corteza ($\boldsymbol{\rho_c}$)	$2735\ kg/m^3$
Densidad del manto ($\boldsymbol{\rho_m}$)	$3300\ kg/m^3$
Profundidad media del Moho	$36.5\ km$

Tabla 4.3: Descripción de los parámetros y los valores (Fuentes de datos, Tabla 3.1) utilizados en el modelo.

Para esta zona de estudio se han llevado a cabo dos perfiles. Un perfil N-S que comprende al volcán Kibo (Figura 4.6) y un perfil NO-SE que abarca a los tres volcanes que conforman el volcán Kilimanjaro (Shira, Kibo y Mawenzi, Figura 4.7). (Ver Anexo 2).

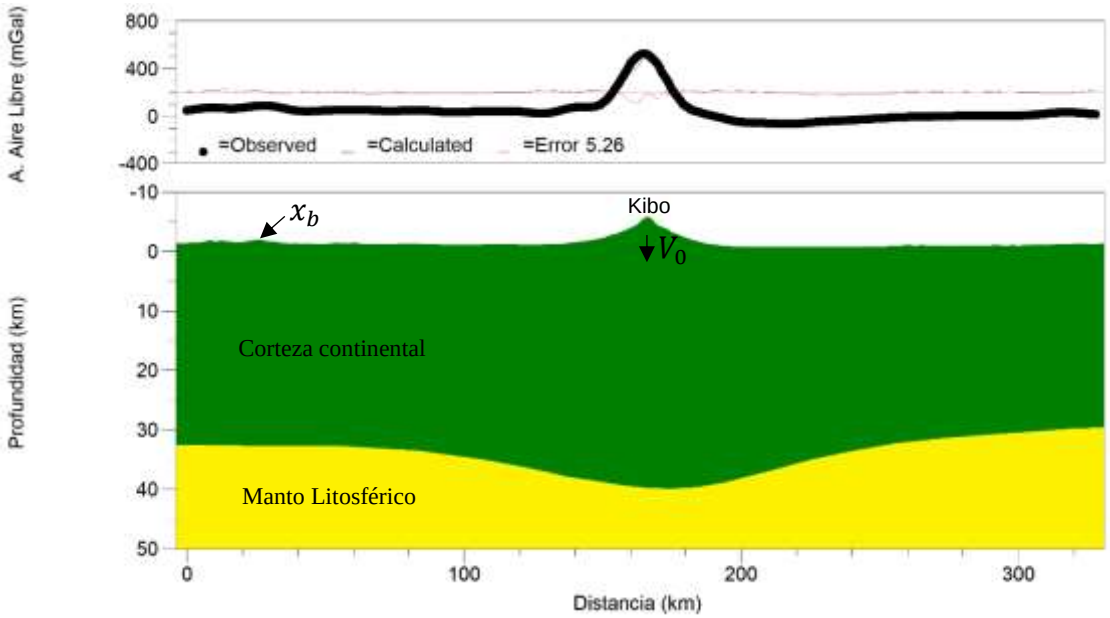


Figura 4.6: Modelo de estructura superior de la litosfera para el perfil N-S correspondiente al volcán Kilimanjaro. Elaborado en el módulo GM-SYS de Oasis Montaj.

El centro de la carga V_0 se encuentra a ~ 166.5 km del origen del perfil y el bulge se observa a 30 km del origen del perfil.

A continuación, se detallan los resultados obtenidos (Figura 4.6):

$$x_b = 136500\ m;\ \alpha = 43449.34\ m;\ D = 4.94 \cdot 10^{21}\ N \cdot m;\ T_e = 8221.67\ m$$

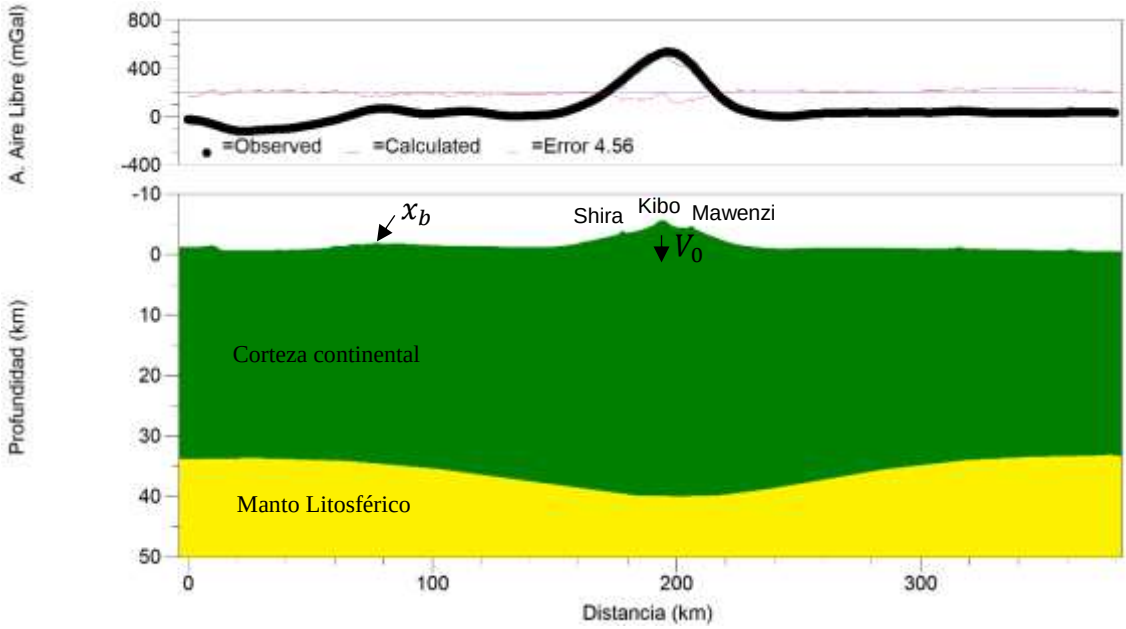


Figura 4.7: Modelo de estructura superior de la litosfera para el perfil NO-SE correspondiente al volcán Kilimanjaro. Elaborado en el módulo GM-SYS de Oasis Montaj.

V_0 se encuentra a ~ 197 km del origen del perfil y el bulge se localiza a ~ 81 km del origen de dicho perfil.

Los resultados obtenidos en la modelización del perfil NO-SE (Figura 4.7) son:

$$x_b = 116000\, m;\ \alpha = 36923.98\, m;\ D = 2.58 \cdot 10^{21}\, N \cdot m;\ T_e = 6621.01\, m$$

Las Figuras 4.6 y 4.7 muestran los modelos obtenidos para los perfiles N-S y NO-SE. Para el perfil N-S se ha obtenido un T_e de 8221.67 m y para el perfil NO-SE un valor de 6621.01 m, que da un T_e promedio de 7421.34 m. El valor máximo de anomalía de Aire Libre se encuentra en ~ 550 mGal (Figuras 4.6 y 4.7) y los valores mínimos son de ~-100 mGal (Figura 4.6) y ~ -150 mGal (Figura 4.7) respectivamente. (Ver Anexos 2 y 3).

4.4. Discusión general

Los valores obtenidos en las modelizaciones realizadas en regiones oceánicas y en región continental muestran que la litosfera se encuentra flexionada debido a la carga que suponen los montes submarinos y volcanes sobre la misma. La respuesta que va a presentar la litosfera ante este tipo de estructuras es diferente en función de si es continental u oceánica y condicionada en función de su edad. Por lo tanto, se utiliza el modelo de placa elástica en la mayoría de los estudios de flexión litosférica ya que permite modelar la deformación de la litosfera bajo los efectos de las cargas volcánicas cuando la edad de dicha carga es superior a >1 Ma (Watts et al., 2013).

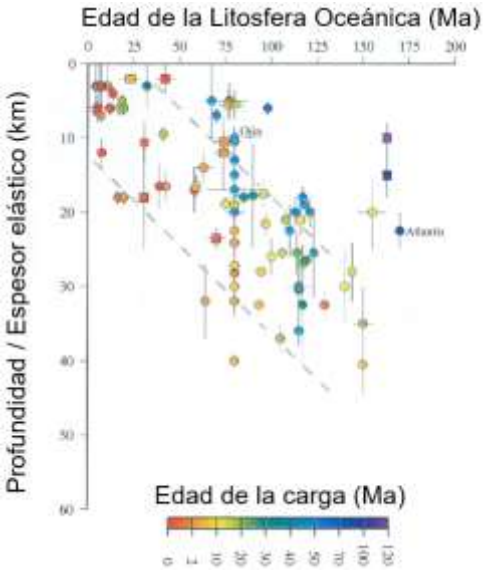


Figura 4.8: Representación de diferentes valores de "Te" frente a la edad de la litosfera, considerando diferentes edades para la carga deformante (ver paleta de colores) en entorno oceánico (modificado de Watts, 2001).

- El valor promedio obtenido de T_e para el monte submarino Seine es de ~ 4000 m. Este valor es bajo teniendo en cuenta que dicho monte submarino tiene una edad de ~ 22 Ma (Geldmacher y Hoernle, 2000) y se localiza sobre una litosfera oceánica vieja (~ 150 Ma), por lo que cabría esperar valores de ~ 30/35 km (Figura 4.8). Catalán et al. (2019) llevaron a cabo un análisis de los efectos de la trayectoria del hot spot en el área del Golfo de Cádiz y el Archipiélago Canario y

detectaron una rama de material del manto que migra desde el Archipiélago Canario hacia el NE, llegando al Golfo de Cádiz a más de 1000 km de distancia. Finalmente, encuentran evidencias de adelgazamiento litosférico entre el Golfo de Cádiz y el Archipiélago Canario y, a su vez, la presencia de un canal astenosférico que conecta ambos escenarios, por lo que el valor obtenido de ~ 4000 m para el monte submarino Seine sería consistente con dicho adelgazamiento de la litosfera.

- El T_e promedio para los montes submarinos del Mar de Scotia es de ~ 1500 m. Estos montes submarinos se asientan sobre una litosfera oceánica joven (~ 22 Ma), por lo que cabría esperar un valor de ~ 4/5 km (Figura 4.8). Martos et al. (2014) analizaron las barreras del flujo de salida entre el Pacífico y el Atlántico, identificando por primera vez una variación significativa en la profundidad de la litosfera debajo del Mar de Scotia que daba como resultado una litosfera adelgazada en su región occidental. Lo interpretaron como una consecuencia de los flujos de corrientes astenosféricas y argumentaron que la litosfera adelgazada del recién nacido Mar de Scotia facilitó los flujos del manto entre el Pacífico y el Atlántico. Por lo tanto, el valor de ~ 1500 m, confirma la presencia de un adelgazamiento litosférico debido al flujo de corrientes astenosféricas.

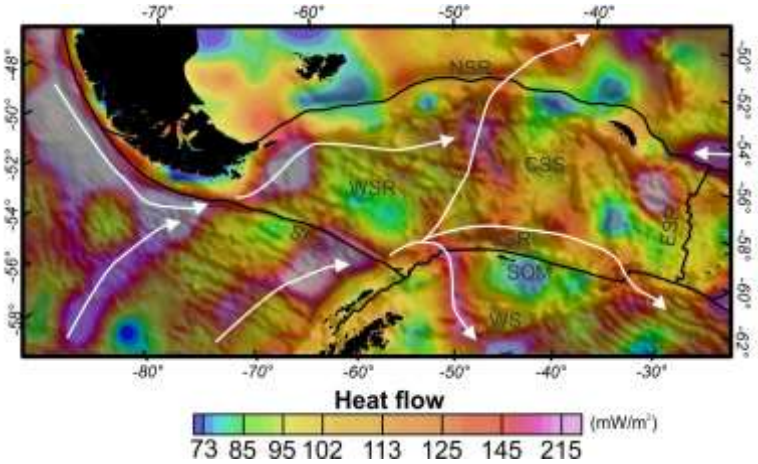


Figura 4.9: Distribución de las corrientes astenosféricas (flechas blancas) superpuestas al mapa de flujo de calor y batimetría del Mar de Scotia. El círculo de color negro señala la ubicación de los dos montes submarinos estudiados en esta región. Las características principales del Mar de Scotia se muestran en la figura y corresponden a la leyenda de la Figura 1.4 (modificado de Martos et al., 2019).

- Mckenzie et al. (2015) estimaron el T_e en diferentes regiones continentales utilizando datos de gravedad del satélite GOCE de la Agencia Espacial Europea (ESA). Concretamente, en la región del África Oriental (ubicación volcán Kilimanjaro) donde la litosfera es fanerozoica (~ 542 Ma), los autores hacen uso de la función admitancia entre la topografía y la anomalía de Aire Libre en el dominio espectral, obteniendo valores bajos de T_e, de unos 7 km, lo que se correlaciona con que dicha región presente una litosfera relativamente delgada. El T_e de ~ 7421 m es muy similar al obtenido por Mckenzie et al. (2015). El hecho de obtener valores muy similares con métodos distintos refuerza la presencia de una litosfera delgada.

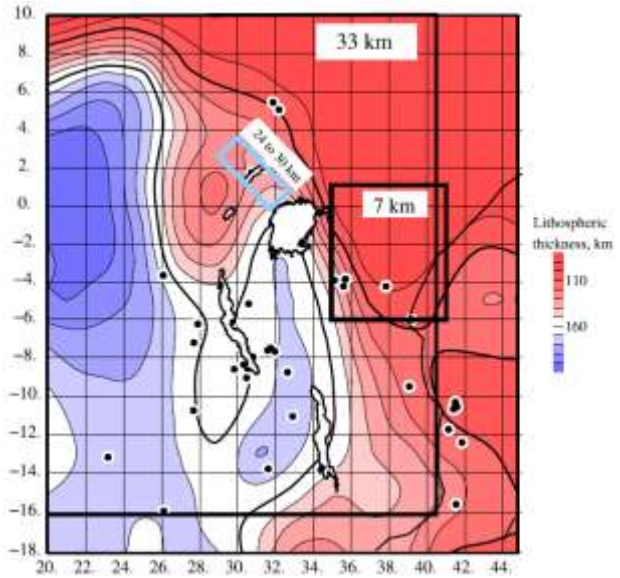


Figura 4.10: Valores de Te obtenidos en África Oriental. El círculo de color verde señala la localización del volcán Kilimanjaro (modificado de Mckenzie et al., 2015).

CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES

En el presente trabajo se ha realizado el estudio de la flexión litosférica en elementos geológicos situados en litosfera oceánica y continental a través de diferentes datos geofísicos. A continuación, se citan las conclusiones obtenidas:

- Los modelos de estructura superior de la litosfera elaborados a partir de los datos de gravedad de satélite, gravedad del modelo EGM2008, topografía y batimetría han permitido adoptar modelos que se ajustan a la señal observada. Estos modelos son razonables y tienen sentido si se comparan con estudios previos (Catalán et al., 2019; Martos et al., 2014, 2019; Mckenzie et al., 2015).

- Los modelos de estructura superior de la litosfera realizados a partir de los datos geofísicos (Tabla 3.1) apoyan el modelo de flexión de placa continua, observándose un hundimiento máximo (w_0) de la litosfera bajo la carga de ~ 14 km para el monte submarino Seine, 5.6 km (monte submarino al N) y 6.8 km (monte submarino al S) para los montes submarinos del Mar de Scotia y ~ 40 km para el volcán Kilimanjaro.

- Los valores máximos de anomalía de Aire Libre en los entornos oceánicos (Seine ~ 225 mGal; montes submarinos Mar de Scotia 36 mGal perfil N-S y ~25 mGal ambos perfiles O-E) representan como únicos los montes estudiados. Sin embargo, no son útiles para describir al volcán Kilimanjaro, ya que este volcán está formado a su vez por tres volcanes (Shira, Kibo y Mawenzi) y lo reconoce como un único volcán, con un valor de ~ 550 mGal.

- Se han obtenido valores bajos de T_e en las áreas de estudio concernientes a la litosfera oceánica, siendo ~ 4000 m de media (perfil N-S, perfil O-E) para el monte submarino Seine y ~ 1500 m de media (perfil N-S, perfiles O-E) para los montes submarinos del Mar de Scotia. De acuerdo con la representación de los diferentes valores de T_e frente a la edad de la litosfera, considerando diferentes edades para la carga deformante (Figura 4.8), el valor de T_e obtenido para el monte submarino Seine debería haber sido mayor (~ 30/35 km) ya que se ubica en una litosfera oceánica vieja (~ 150 Ma) y el obtenido en el Mar de Scotia es algo inferior al esperado (~ 4/5 km) en una litosfera oceánica joven (~ 20 Ma) donde se apoyan ambos montes submarinos. Los modelos llevados a cabo en estos entornos oceánicos apoyan los resultados obtenidos de una litosfera adelgazada debido a la existencia de corrientes astenosféricas (Catalán et al., 2019; Martos et al., 2014, 2019).

- La modelización realizada para el entorno continental proporciona un valor de T_e de ~ 7500 m de media (perfil N-S, perfil NO-SE) para el volcán Kilimanjaro, lo que se asemeja a los resultados obtenidos en los estudios llevados a cabo por Mckenzie et al. (2015) con resultados de 7 km.

REFERENCIAS

Barker, P. F. (2001). Scotia Sea regional tectonics evolution: implications for mantle flow and palaeocirculation. Earth Science Reviews, 55(1-2), 1–39. https://doi.org/10.1016/S0012-8252(01)00055-1.

Barrell, J. (1914a). The strength of the Earth's crust: The Journal of Geology, 22(4), 289 – 314. https://doi.org/10.1086/622155.

Barrell, J. (1914b). The strength of the Earth's crust: The Journal of Geology, 22(5), 441 – 468. https://doi.org/10.1086/622163.

Barrell, J. (1914c). The strength of the Earth's crust: The Journal of Geology, 22(7), 655 – 683. https://doi.org/10.1086/622181.

Bohoyo, F., Galindo-Zaldívar, J., Jabaloy, A., Maldonado, A., Rodríguez-Fernández, J., Schreider, A., & Suriñach, E. (2007). Extensional deformation and development of deep basins associated with the sinistral transcurrent fault zone of the Scotia-Antarctic plate boundary. Geological Society, London, Special Publication, 290(1), 203–217. https://doi.org/10.1144/SP290.6.

Bohoyo, F., Larter, R. D., Galindo-Zaldívar, J., Leat, P. T., Maldonado, A., Tate, A. J., Flexas, M. M., Gowland, E. J. M., Arndt, J. E., Dorschel, B., Kim, Y. D., Hong, J. K., López-Martínez, J., Maestro, A., Bermúdez, O., Nitsche, F. O., Livermore, R. A., & Riley, T. R. (2019). Morphological and geological features of Drake Passage, Antarctica, from a new digital bathymetric model. Journal of Maps, 15(2), 49-59. https://doi.org/10.1080/17445647.2018.1543618.

Buchs, D. M., Hoernle, K. & Grevemeyer, I. (2015). Seamounts. In: Harff, J., Meschede, M., Petersen, S., Thiede, J. (eds) Encyclopedia of Marine Geosciences. Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-007-6644-0_34-1.

Burov, E.B., & Diament, M. (1995). The effective elastic thickness (Te) of continental lithosphere: What does it really mean? Journal of Geophysical Research, 100(B3), 3905–3928. https://doi.org/10.1029/94JB02770.

Catalán, M., Martos, Y. M., & Martín-Davila, J. (2019). Eurasia-Africa plate boundary affected by a South Atlantic asthenospheric channel in the Gulf of Cadiz region? Pure and Applied Geophysics, (177), 1725-1738. https://doi.org/10.1007/s00024-019-02380-4.

Chorowicz, J. (2005). The East African Rift System. Journal of African Earth Sciences, 43 (1–3), 379–410. https://doi.org/10.1016/j.jafrearsci.2005.07.019.

García Cruz, C.M. (1998). Puentes intercontinentales e Isostasia: aspectos históricos y didácticos. Enseñanza de las Ciencias de la Tierra, (6.3), 211-216. I.S.S.N.: 1132-9157 https://www.raco.cat/index.php/ECT/article/view/88507/166206.

Geldmacher, J., & Hoernle, K. (2000). The 72 Ma geochemical evolution of the Madeira hotspot (Eastern North Atlantic): recycling of Paleozoic (≤500 Ma). Earth and Planetary Science Letters 183(1–2), 73–92. https://doi.org/10.1016/S0012-821X(00)00266-1.

Geldmacher, J., Hoernle, K., Bogaard, P.v.d., Duggen, S., & Werner, R. (2005). New 40Ar39Ar Age and Geochemical Data from Seamounts in the Canary and Madeira Volcanic Provinces: Support for the mantle plume hypothesis. Earth and Planetary Science Letters 237(1–2), 85–101. https://doi.org/10.1016/j.epsl.2005.04.037.

Geldmacher, J., Hoernle, K., Klügel, A., Bogaard, P.v.d., Wombacher, F., & Berning, B. (2006). Origin and geochemical evolution of the Madeira-Tore Rise (eastern North Atlantic). Journal of Geophysical Research: Solid Earth, 111(B9). https://doi.org/10.1029/2005JB003931.

Hirt, C., Kuhn, M., Featherstone, W. E., & Gtötl, F. (2012). Topographic/isostatic evaluation of new-generation GOCE gravity field models. Journal of Geophysical Research: Solid Earth, 117(B5), 1–16. https://doi.org/10.1029/2011JB008878.

Jones, M., Sandwell, D. T, & Beaman, R. (2010). New Soundings for SRTM30_Plus V7.0. Fifth Annual GEBCO Bathymetric Science Day. IHO/IOC Committee for the General Bathymetric Charts of the Oceans (GEBCO), Callao, Peru.

Laske, G., Masters, G., Ma, Z., & Pasyanos, M. (2013). Update on CRUST1.0: A 1-degree Global Model of Earth's Crust. General Assembly Conference Abstracts, 15, Abstract EGU2013-2658. http://igppweb.ucsd.edu/~gabi/crust1.html.

Larter, R. D., Vanneste, L. E., Morris, P. & Smythe, D. K. (2003). Structure and tectonic evolution of the South Sandwich arc. Geological Society, London, Special Publications, 219(1), 255–284. https://doi.org/10.1144/GSL.SP.2003.219.01.13.

Livermore, R. A. (2003). Back-arc spreading and mantle flow in the East Scotia Sea. Geological Society, London, Special Publications, 219(1), 315-331. https://doi.org/10.1144/GSL.SP.2003.219.01.15.

Livermore, R., Nankivell, A., Eagles, G., & Morris, P. (2005). Paleogene opening of Drake Passage. Earth and Planetary Science Letters, 236(1–2), 459–470. https://doi.org/10.1016/j.epsl.2005.03.027.

Livermore, R., Hillenbrand, C. D., Meredith, M., & Eagles, G. (2007). Drake Passage and Cenozoic climate: an open and shut case? Geochemistry, Geophysics, Geosystems, 8(1). https://doi.org/10.1029/2005GC001224.

Lowrie, W. & Fitchner, A. (2020). Fundamentals of Geophysics (3rd Edition). Cambridge University Press.

Martos, Y. M., Galindo-Zaldívar, J., Catalán, M., Bohoyo, F., & Maldonado, A. (2014). Asthenospheric Pacific-Atlantic flow barriers and the West Scotia Ridge extinction. Geophysical Research Letters, 41(1), 43-49. https://doi.org/10.1002/2013GL058885.

Martos, Y. M., Catalán, M., & Galindo-Zaldívar, J. (2019). Curie Depth, heat flux and thermal subsidence reveal the Pacific mantle outflow through the Scotia Sea. Journal of Geophysical Research: Solid Earth, 124(11), 10735-10751. https://doi.org/10.1029/2019JB017677.

McKenzie, D., & Fairhead, D. (1997). Estimates of the effective elastic thickness of the continental lithosphere from Bouguer and free air gravity anomalies. Journal of Geophysical Research: Solid Earth, 102(B12), 27523-27552. https://doi.org/10.1029/97JB02481.

McKenzie, D., Yi, W., & Rummel, R. (2015). Estimates of Te for Continental Regions Using GOCE Gravity. Earth and Planetary Science Letters, 428, 97–107. https://doi.org/10.1016/j.epsl.2015.07.036.

Müller, R. D., Sdrolias, M., Gaina, C., & Roest, W. R. (2008). Age, spreading rates, and spreading asymmetry of the world's ocean crust. Geochemistry, Geophysics, Geosystems, 9(4), 1–19. https://doi.org/10.1029/2007GC001743.

Nonnotte, P., Guillou, H., Le Gall, B., Benoit, M., Cotten, J., & Scaillet, S. (2008). New K-Ar age determinations of Kilimanjaro volcano in the North Tanzanian diverging rift, East Africa. Journal of Volcanology and Geothermal Research, 173(1–2), 99–112. https://doi.org/10.1016/j.jvolgeores.2007.12.042.

Pavlis, N.K., Holmes, S.A, Kenyon, S.C., & Factor, J.K. (2012). The Development and Evaluation of the Earth Gravitational Model 2008 (EGM2008). 117(B4), 1–38. https://doi.org/10.1029/2011JB008916.

Pérez-Gussinyé, M., Metois, M., Fernández, M., Vergés, J., Fullea, J., & Lowry, A.R. (2009). Effective Elastic Thickness of Africa and Its Relationship to Other Proxies for Lithospheric

Structure and Surface Tectonics. Earth and Planetary Science Letters 287(1–2), 152–67. https://doi.org/10.1016/j.epsl.2009.08.004.

Sandwell, D. T., Muller, R. D., Smith, W. H. F., Garcia, E., & Francis, R. (2014). New global marine gravity model from CryoSat-2 and Jason-1 reveals buried tectonic structure. Science, 346(6205), 65–67. https://doi.org/10.1126/science.1258213.

Scoon, R.N. (2018) Geological Framework. In: Geology of National Parks of Central/Southern Kenya and Northern Tanzania. Springer, Cham, 11-18. https://doi.org/10.1007/978-3-319-73785-0_2.

Straume, E. O., Gaina, C., Medvedev, S., Hochmuth, K., Gohl, K., Whittaker, J. M., Abdul Fattah, R., Doornenbal, J. C., & Hopper, J. R. (2019). GlobSed: Updated Total Sediment Thickness in the World's Oceans. Geochemistry, Geophysics, Geosystems, 20(4), 1756–1772. https://doi.org/10.1029/2018GC008115.

Taylor, J.R. (2014). Introducción al Análisis de Errores: El estudio de las incertidumbres en las mediciones físicas (2ª edición).

Tessema, A., & Antoine, L. A. G. (2003). Variation in Effective Elastic Plate Thickness of the East Africa Lithosphere. Journal of Geophysical Research: Solid Earth 108(B5). https://doi.org/10.1029/2002JB002200.

Turcotte, D. L., & Schubert, G. (2002). Geodynamics 2nd ed., 456 pp. Cambridge University Press, United Kingdom. https://doi.org/10.1017/CBO9780511807442.

Udías, A., & Mezcua, J. (1986). Fundamentos de Geofísica (1ª Edición).

Watts, A. B., & Ten Brink, U.S. (1989). Crustal Structure, Flexure, and Subsidence History of the Hawaiian Islands. Journal of Geophysical Research: Solid Earth, 94(B8), 10473–10500. https://doi.org/10.1029/jb094ib08p10473.

Watts, A. B. (1994). Crustal structure, gravity anomalies and flexure of the lithosphere in the vicinity of the Canary Islands, Geophysical Journal International, 119(2), 648-666. https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1994.tb00147.x.

Watts, A.B. (2001). Isostasy and Flexure of the Lithosphere, University of Oxford.

Watts, A. B., Sandwell, D. T., Smith, W. H. F., & Wessel, P. (2006). Global gravity, bathymetry, and the distribution of submarine volcanism through space and time. Journal of Geophysical Research: Solid Earth, 111(B8), 1–26. https://doi.org/10.1029/2005JB004083.

Watts, A. B., Zhong, S. J., & Hunter, J. (2013). The Behavior of the Lithosphere on Seismic to Geologic Timescales. Annual Review of Earth and Planetary Sciences, 41(1), 443–468. http://doi.org/10.1146/annurev-earth-042711-105457.

Wessel, P. (2001). Global distribution of seamounts inferred from gridded Geosat/ERS-1 altimetry. Journal of Geophysical Research: Solid Earth, 106(B9), 19431–19441. https://doi.org/10.1029/2000jb000083.

Wessel, P., Sandwell, D. T., & Kim, S-S. (2010). The Global Seamount Census. Oceanography, 23(1), 24-33. https://www.jstor.org/stable/24861056.

Yamin, M. G., & Anselmi, G. (2020). Geología de las placas Scotia y Sandwich. Revisión y mapa geológico. Instituto de Geología y Recursos Minerales, Servicio Geológico Minero Argentino. Serie Contribuciones Técnicas, Geología (8), 29. Buenos Aires. https://repositorio.segemar.gov.ar/handle/308849217/4058.

ANEXO 1

Superficie de respuesta a la carga y superficie de discontinuidad generada a partir de los datos de gravedad de satélite y gravedad del modelo EGM2008.

1.- Monte submarino Seine.

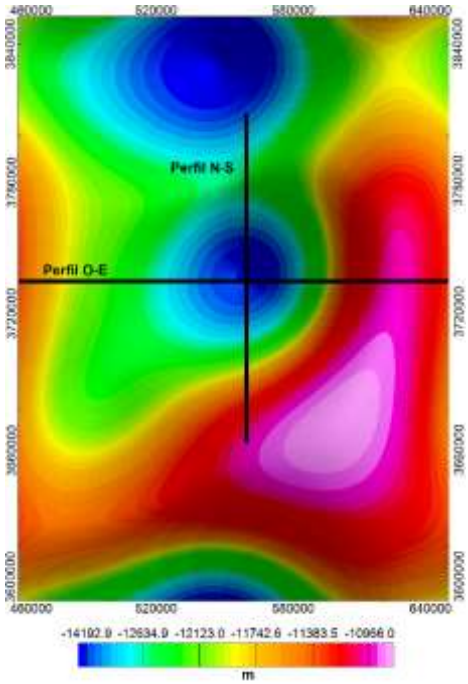


Figura A1.1: Superficie de respuesta a la carga. Se muestran los perfiles seleccionados para la modelización de la estructura superior de la litosfera. En coordenadas UTM zona 28N. Elaborado con el programa LithoFLEX.

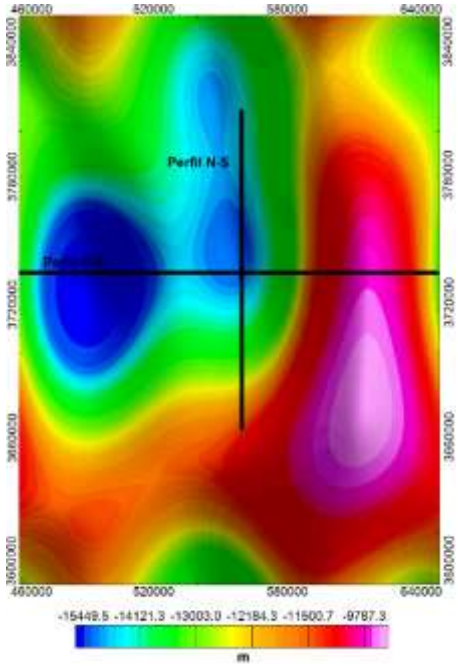


Figura A1.2: Superficie de discontinuidad generada a partir de los datos de gravedad de satélite. Se muestran los perfiles seleccionados para la modelización de la estructura superior de la litosfera. En coordenadas UTM zona 28N. Elaborado con el programa LithoFLEX.

2.- Montes submarinos en el Mar de Scotia.

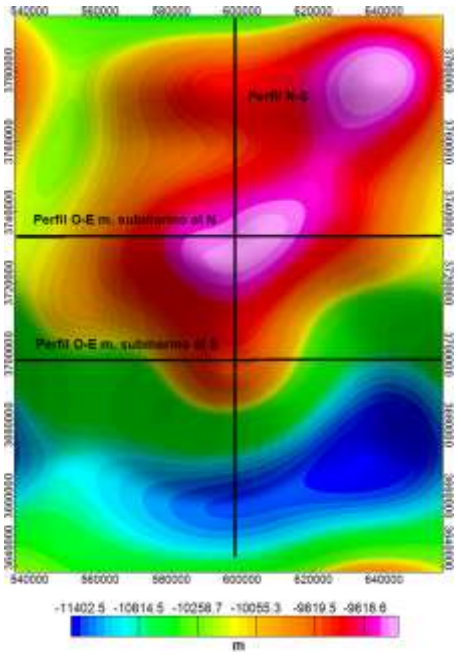


Figura A1.3: Superficie de respuesta a la carga. Se muestran los perfiles seleccionados para la modelización de la estructura superior de la litosfera. En coordenadas UTM zona 20S. Elaborado con el programa LithoFLEX.

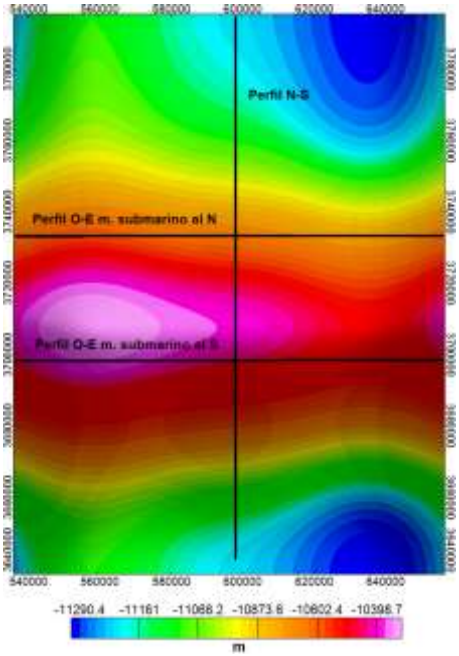


Figura A1.4: Superficie de discontinuidad generada a partir de los datos de gravedad de satélite. Se muestran los perfiles seleccionados para la modelización de la estructura superior de la litosfera. En coordenadas UTM zona 20S. Elaborado con el programa LithoFLEX.

3.- Volcán Kilimanjaro.

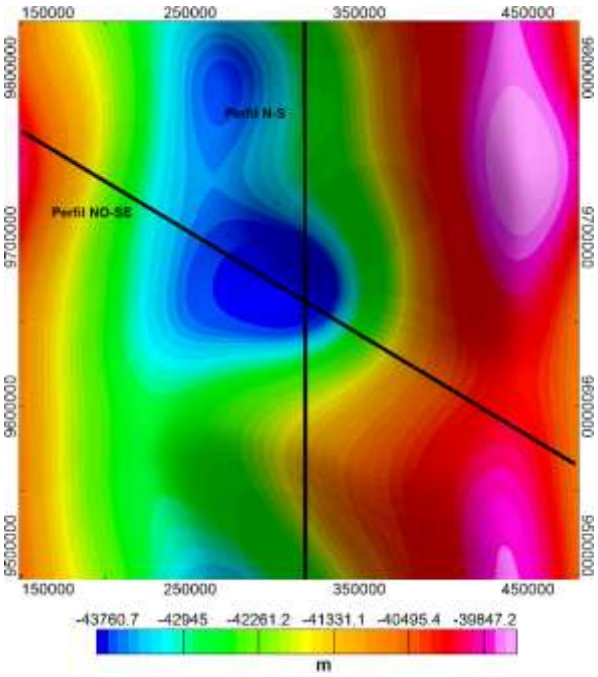


Figura A1.5: Superficie de respuesta a la carga. Se muestran los perfiles seleccionados para la modelización de la estructura superior de la litosfera. En coordenadas UTM zona 37S. Elaborado con el programa LithoFLEX.

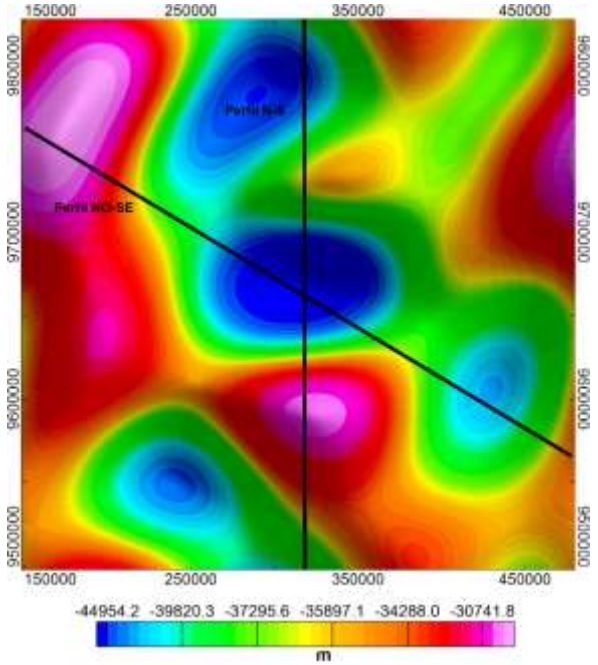


Figura A1.6: Superficie de discontinuidad generada a partir de los datos de gravedad de satélite. Se muestran los perfiles seleccionados para la modelización de la estructura superior de la litosfera. En coordenadas UTM zona 37S. Elaborado con el programa LithoFLEX.

ANEXO 2

Anomalías de Aire Libre y topografía de las áreas de estudio:

1.- Monte submarino Seine.

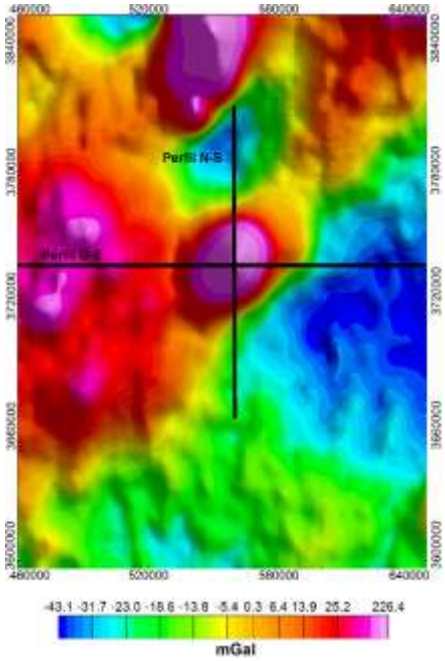


Figura A2.1: Anomalía de Aire Libre (Sandwell et al., 2014). Se muestran los perfiles seleccionados para la modelización de la estructura superior de la litosfera. En coordenadas UTM zona 28N.

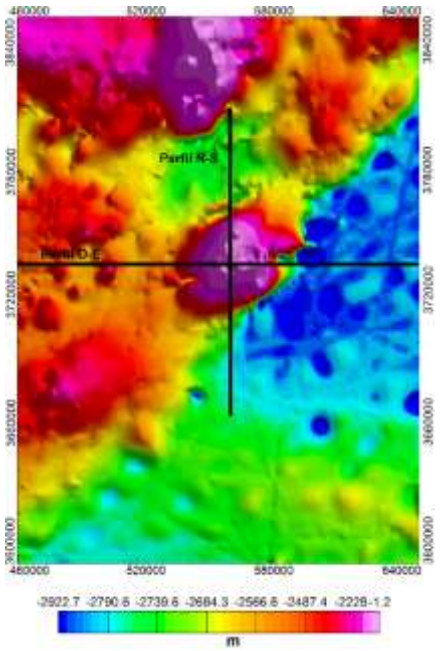


Figura A2.2: Topografía equivalente a roca (RET) calculada con la ec. 3.4. Se muestran los perfiles seleccionados para la modelización de la estructura superior de la litosfera. En coordenadas UTM zona 28N.

2.- Montes submarinos en el Mar de Scotia.

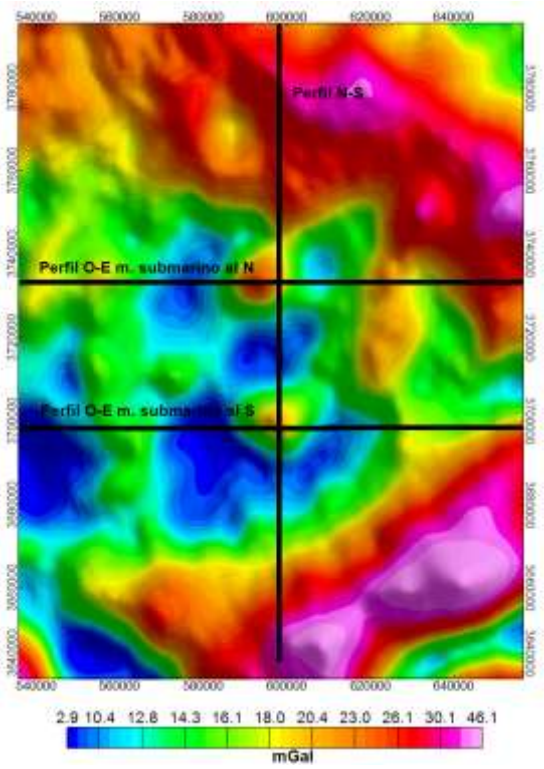


Figura A2.3: Anomalía de Aire Libre (Sandwell et al., 2014). Se muestran los perfiles seleccionados para la modelización de la estructura superior de la litosfera. En coordenadas UTM zona 20S.

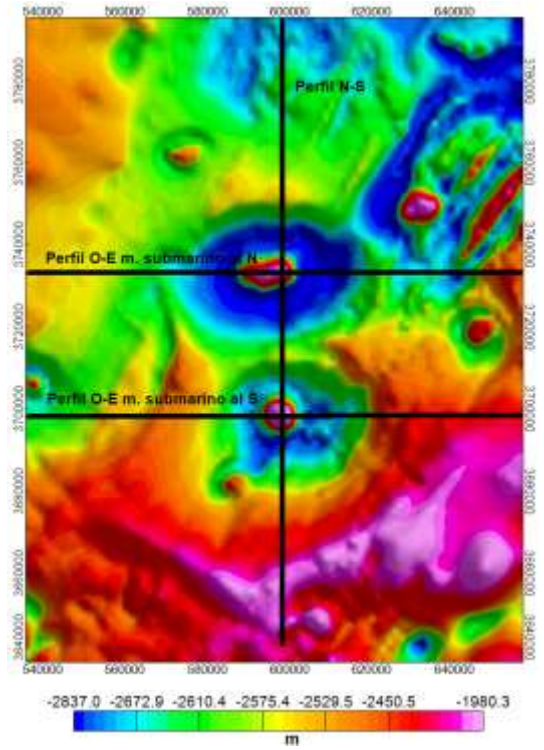


Figura A2.4: Topografía equivalente a roca (RET) calculada con la ec. 3.4. Se muestran los perfiles seleccionados para la modelización de la estructura superior de la litosfera. En coordenadas UTM zona 20S.

3.- Volcán Kilimanjaro.

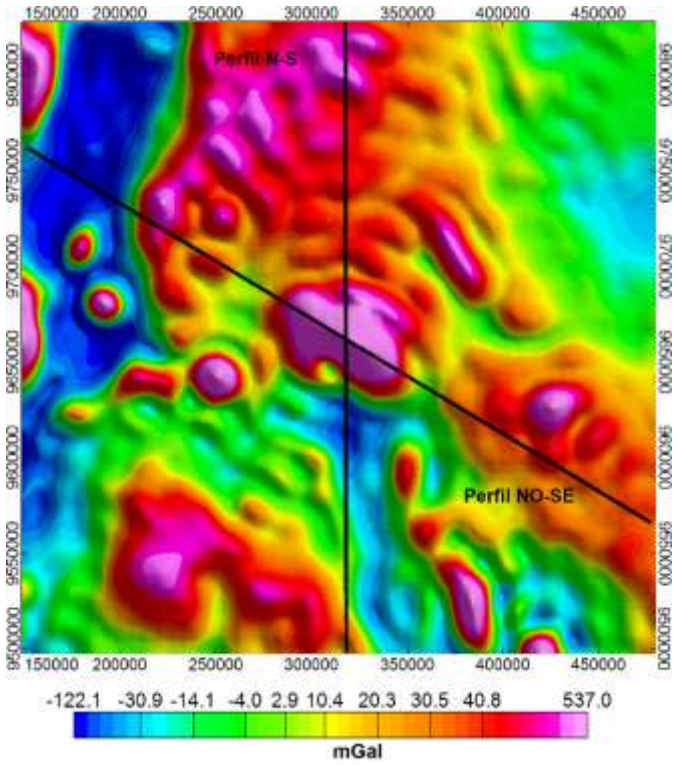


Figura A2.5: Anomalía de Aire Libre (modelo EGM2008). Se muestran los perfiles seleccionados para la modelización de la estructura superior de la litosfera. En coordenadas UTM zona 37S.

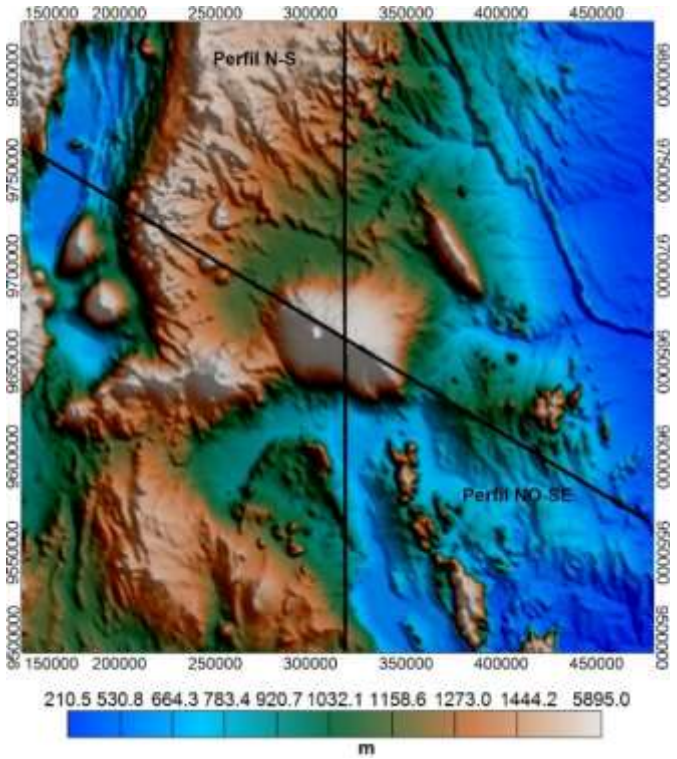


Figura A2.6: Modelo digital del terreno SRTM30_Plus V7.0. Se muestran los perfiles seleccionados para la modelización de la estructura superior de la litosfera. En coordenadas UTM zona 37S.

ANEXO 3

Código MATLAB. Cálculo espesor elástico T_e.

% Monte submarino Seine

```
% Perfil N-S
x1 = 16000                          % Localización del bulge medido desde el origen del perfil,
en metros.
x2 = 70000                          % Localización de la carga Vo, en metros.
xb = x2-x1                          % Bulge medido desde el centro de la carga.
alpha = xb/pi
g = 9.81                            % Aceleración de la gravedad, en m/s^2.
rho_m = 3350                        % Densidad del manto, en kg/m^3.
rho_w = 1030                        % Densidad del agua,  en kg/m^3.
coef_Poisson = 0.25
m = 1- coef_Poisson^2
D = (alpha^4*g*(rho_m-rho_w))/4     % Rigidez flexural, en N*m.
E = 1*10^11;                        % Módulo de Young,  en Pa.
Te = ((D*12*m)*E^(-1))^(1/3)        % Espesor elástico, en metros.

% Perfil O-E
x1 = 45000                          % Localización del bulge medido desde el origen del perfil,
en metros.
x2 = 102000                         % Localización de la carga Vo, en metros.
xb = x2-x1;                         % Bulge medido desde el centro de la carga
alpha = xb/pi                       % Parámetro flexural.
g = 9.81                            % Aceleración de la gravedad, en m/s^2.
rho_m = 3350                        % Densidad del manto, en kg/m^3.
rho_w = 1030                        % Densidad del agua,  en kg/m^3.
coef_Poisson = 0.25                 % Coeficiente de Poisson.
m = 1- coef_Poisson^2
D = (alpha^4*g*(rho_m-rho_w))/4     % Rigidez flexural, en N*m.
E = 1*10^11;                        % Módulo de Young, en Pa.
Te = ((D*12*m)*E^(-1))^(1/3)        % Espesor elástico, en metros.
```

% Montes submarinos en el Mar de Scotia

```
% Perfil N-S que engloba a ambos montes submarinos.

% Monte submarino localizado más al N.
x1_1 = 43400                        % Localización del bulge medido desde el origen del perfil,
en metros.
x2_1 = 61300                        % Localización de la carga Vo, en metros.
xb_1 = x2_1-x1_1                    % Bulge medido desde el centro de la carga
alpha_1 = xb_1/pi                   % Parámetro flexural.
g = 9.81                            % Aceleración de la gravedad, en m/s^2.
rho_m = 3300                        % Densidad del manto, en kg/m^3.
rho_w = 1030                        % Densidad del agua,  en kg/m^3.
coef_Poisson = 0.25                 % Coeficiente de Poisson.
m = 1- coef_Poisson^2
D_1 = (alpha_1^4*g*(rho_m-rho_w))/4 % Rigidez flexural, en N*m.
E = 1*10^11;                        % Módulo de Young, en Pa.
Te_1 = ((D_1*12*m)*E^(-1))^(1/3)    % Espesor elástico, en metros.

% Entre ambos montes submarinos.
x1_2 = 82000                % Localización del bulge medido desde el origen del perfil en metros.
x2_2 = 96300                        % Localización de la carga Vo, en metros.
xb_2 = x2_2-x1_2;                   % Bulge medido desde el centro de la carga.
alpha_2 = xb_2/pi                   % Parámetro flexural.
```

```
g = 9.81                                % Aceleración de la gravedad, en m/s^2.
rho_m = 3300                            % Densidad del manto, en kg/m^3.
rho_w = 1030                            % Densidad del agua, en kg/m^3.
coef_Poisson = 0.25                     % Coeficiente de Poisson
m = 1- coef_Poisson^2
D_2 = (alpha_2^4*g*(rho_m-rho_w))/4     % Rigidez flexural, en N*m.
E = 1*10^11;                            % Módulo de Young, en Pa.
Te_2 = ((D_2*12*m)*E^(-1))^(1/3)        % Espesor elástico, en metros.

% Monte submarino localizado más al S.
x1_3 = 96300                    % Localización del bulge medido desde el origen del perfil, en metros.
x2_3 = 135000                           % Localización de la carga Vo, en metros.
xb_3 = x2_3-x1_3;                       % Bulge medido desde el centro de la carga.
alpha_3 = xb_3/pi                       % Parámetro flexural.
g = 9.81                                % Aceleración de la gravedad, en m/s^2.
rho_m = 3300                            % Densidad del manto, en kg/m^3.
rho_w = 1030                            % Densidad del agua, en kg/m^3.
coef_Poisson = 0.25                     % Coeficiente de Poisson.
m = 1- coef_Poisson^2
D_3 = (alpha_3^4*g*(rho_m-rho_w))/4     % Rigidez flexural, en N*m.
E = 1*10^11;                            % Módulo de Young, en Pa.
Te_3 = ((D_3*12*m)*E^(-1))^(1/3)        % Espesor elástico, en metros.

% Perfil O-E monte submarino localizado más al N
x1 = 60000                      % Localización del bulge medido desde el origen del perfil, en metros.
x2 = 86500                              % Localización de la carga Vo, en metros.
xb = x2-x1                              % Bulge medido desde el centro de la carga Vo.
alpha = xb/pi                           % Parámetro flexural.
g = 9.81                                % Aceleración de la gravedad, en m/s^2.
rho_m = 3300                            % Densidad del manto, en kg/m^3.
rho_w = 1030                            % Densidad del agua, en kg/m^3.
coef_Poisson = 0.25
m = 1- coef_Poisson^2
D = (alpha^4*g*(rho_m-rho_w))/4         % Rigidez flexural, en N*m.
E = 1*10^11;                            % Módulo de Young, en Pa.
Te = ((D*12*m)*E^(-1))^(1/3)            % Espesor elástico, en metros.

% Perfil O-E monte submarino localizado más al S
x1 = 62000                      % Localización del bulge medido desde el origen del perfil, en metros.
x2 = 95000                              % Localización de la carga Vo, en metros.
xb = x2-x1                              % Bulge medido desde el centro de la carga Vo.
alpha = xb/pi                           % Parámetro flexural.
g = 9.81                                % Aceleración de la gravedad, en m/s^2.
rho_m = 3300                            % Densidad del manto, en kg/m^3.
rho_w = 1030                            % Densidad del agua, en kg/m^3.
coef_Poisson = 0.25
m = 1- coef_Poisson^2
D = (alpha^4*g*(rho_m-rho_w))/4         % Rigidez flexural, en N*m.
E = 1*10^11;                            % Módulo de Young, en Pa.
Te = ((D*12*m)*E^(-1))^(1/3)            % Espesor elástico, en metros.
```

% Volcán Kilimanjaro

```
% Perfil N-S
x1 = 30000                      % Localización del bulge medido desde el origen del perfil, en metros.
x2 = 166500                             % Localización de la carga Vo, en metros.
xb = x2-x1                              % Bulge medido desde el centro de la carga Vo.
alpha = xb/pi                           % Parámetro flexural
g = 9.81                                % Aceleración de la gravedad, en m/s^2.
```

```
rho_m = 3300                                    % Densidad del manto, en kg/m^3.
rho_c = 2735                                    % Densidad de la corteza, en kg/m^3.
coef_Poisson = 0.25
m = 1- coef_Poisson^2
D = (alpha^4*g*(rho_m-rho_c))/4             % Rigidez flexural, en N*m.
E = 1*10^11;                                    % Módulo de Young, en Pa.
Te = ((D*12*m)*E^(-1))^(1/3)                    % Espesor elástico, en metros.

% Perfil NO-SE
x1 = 81000                          % Localización del bulge medido desde el origen del perfil, en metros.
x2 = 197000                                     % Localización de la carga Vo, en metros.
xb = x2-x1;                                     % Bulge medido desde el centro de la carga Vo.
alpha = xb/pi                                   % Parámetro flexural
g = 9.81                                        % Aceleración de la gravedad, en m/s^2.
rho_m = 3300                                    % Densidad del manto, en kg/m^3.
rho_c = 2735                                    % Densidad de la corteza, en kg/m^3.
coef_Poisson = 0.25
m = 1- coef_Poisson^2
D = (alpha^4*g*(rho_m-rho_c))/4             % Rigidez flexural, en N*m.
E = 1*10^11;                                    % Módulo de Young, en Pa.
Te = ((D*12*m)*E^(-1))^(1/3)                    % Espesor elástico, en metros.
```

ANEXO 4

Cálculo de errores.

Los valores de profundidad del Moho, densidad de corteza oceánica (superior e inferior) y continental, densidad del manto litosférico y espesor de sedimentos del modelo CRUST 1.0 no proporcionan los errores asociados, por lo que se ha procedido a calcular cómo varían los errores obtenidos en los diferentes modelos cuando se modifica la localización del máximo levantamiento producido por la flexión o bulge (x_b). Por tanto, dicha modificación del bulge nos permite obtener los errores en los cálculos de T_e.

A continuación, se muestran las fórmulas empleadas para llevar a cabo el cálculo de los errores (Taylor, 2014; Turcotte y Schubert, 2002; Watts, 2001).

$$\alpha = \frac{x_b}{\pi} \pm \delta\alpha \qquad \text{ec. A4.1}$$

$$D = \frac{\alpha^4 g(\rho_m - \rho_w)}{4} \qquad \text{ec. A4.2}$$

$$D = \frac{\alpha^4 g(\rho_m - \rho_c)}{4} \qquad \text{ec. A4.3}$$

$$T_e = \left[\frac{D12(1-\nu^2)}{E}\right]^{1/3} \qquad \text{ec. A4.4}$$

$$\delta T_e = \frac{dT_e}{d\alpha}\,\delta\alpha \qquad \text{ec. A4.5}$$

En la ec. A4.1, se observa que $\alpha(x_b)$. El $\delta\alpha$ es la modificación del x_b que hace que varíe el error en los diferentes modelos elaborados en el módulo GM-SYS de Oasis Montaj, es decir, se altera la posición del bulge hasta que se detecta una variación en la respuesta sintética del modelo de estructura superior de la litosfera y ese desplazamiento horizontal determina la sensibilidad de dicho modelo; y por lo tanto la resolución máxima en α. Con la ec. A4.2, se calcula la rigidez flexural (D) para el entorno oceánico (caso monte submarino Seine y montes submarinos en el Mar de Scotia) y para el entorno continental (volcán Kilimanjaro), se hace uso de la ec. A4.3. Finalmente, se utilizan las ecs. A4.4 y A4.5 para obtener el error δT_e.

Modelos		Error (GM-SYS)	Modificación x_b (m)	Nuevo error (GM-SYS)	$T_e \pm \delta T_e$ (m)
Monte submarino Seine	Perfil N-S (Fig. 4.1)	6.43	80	6.44	3823.87 ± 7.55
	Perfil O-E (Fig. 4.2)	4.78	318	4.79	4109.72 ± 30.57
Montes submarinos Mar de Scotia	Perfil N-S m.s al N (Fig. 4.3)	1.46	150	1.47	870.82 ± 9.72
	Perfil N-S entre ambos m.s (Fig. 4.3)	1.46	180	1.47	645.43 ± 10.83
	Perfil N-S m.s al S (Fig. 4.3)	1.46	230	1.47	2432.88 ±19.28
	Perfil O-E m.s al N (Fig. 4.4)	1.16	300	1.17	1469.38 ± 22.16
	Perfil O-E m.s al S (Fig. 4.5)	1.39	140	1.40	1968.46 ± 11.13
Volcán Kilimanjaro	Perfil N-S (Fig. 4.6)	5.26	50	5.27	8221.67 ± 4.01
	Perfil NO-SE (Fig. 4.7)	4.56	210	4.57	6621.01 ± 15.97

Tabla A4.1: Descripción de los valores obtenidos en el cálculo de errores de los diferentes modelos.

Código MATLAB. Cálculo de errores.

%% <u>Monte submarino Seine</u>

```
% Perfil N-S
% alpha = xb/pi +-deltha_alpha          % Parámetro flexural con el error asociado en la medida.
x_mod = 80                              % Valor que modifica la sensibilidad del modelo, en metros.
delta_alpha = x_mod/pi                  % Error asociado al parámetro flexural que modifica el error del
                                        % modelo gravimétrico.
g = 9.81                                % Aceleración de la gravedad, en m/s^2.
rho_m = 3350                            % Densidad del manto, en kg/m^3.
rho_w = 1030                            % Densidad del agua, en kg/m^3.
E = 1*10^11                             % Módulo de Young, en Pa.
coef_Poisson = 0.25                     % Coeficiente de Poisson.
syms alpha                              % Variable simbólica.
m = 1- coef_Poisson^2
D = (alpha^4*g*(rho_m-rho_w))/4         % Rigidez flexural, en N*m
Te = ((D*12*m)*E^(-1))^(1/3)            % Espesor elástico, en metros.
dTe = diff(Te)                          % Derivada.
x1 = 16000                              % Localización del máximo levantamiento producido por la flexión o bulge
                                        % medido desde el origen del perfil, en metros.
x2 = 70000                              % Localización de la carga Vo, en metros.
xb = x2-x1                              % Bulge medido desde el centro de la carga Vo.
alpha = xb/pi                           % Mejor ajuste parámetro flexural alpha.
L = subs(dTe,alpha)                     % Sustitución del valor de alpha en la derivada.
delta_Te = L*delta_alpha                % Error espesor elástico.
```

```
% Perfil O-E
x_mod = 318                          % Valor que modifica la sensibilidad del modelo, en metros.
delta_alpha = x_mod/pi               % Error asociado al parámetro flexural que modifica el error del
                                     % modelo de estructura superior de la litosfera.
g = 9.81                             % Aceleración de la gravedad, en m/s^2.
rho_m = 3350                         % Densidad del manto, en kg/m^3.
rho_w = 1030                         % Densidad del agua, en kg/m^3.
E = 1*10^11                          % Módulo de Young, en Pa.
coef_Poisson = 0.25                  % Coeficiente de Poisson.
syms alpha                           % Variable simbólica.
m = 1- coef_Poisson^2
D = (alpha^4*g*(rho_m-rho_w))/4      % Rigidez flexural, en N*m
Te = ((D*12*m)*E^(-1))^(1/3)         % Espesor elástico, en metros.
dTe = diff(Te);                      % Derivada.
x1 = 45000                   % Localización del máximo levantamiento producido por la flexión o bulge
                             % medido desde el origen del perfil, en metros.
x2 = 102000                          % Localización de la carga Vo, en metros.
xb = x2-x1;                          % Bulge medido desde el centro de la carga Vo.
alpha = xb/pi                        % Mejor estimación del parámetro flexural alpha.
L = subs(dTe,alpha)                  % Sustitución del valor alpha en la derivada.
delta_Te = L*delta_alpha             % Error espesor elástico.
```

%% Montes submarinos en el Mar de Scotia

```
% Perfil N-S que engloba a ambos montes submarinos.

% Monte submarino localizado más al N.
x_mod_1 = 150                        % Valor que modifica la sensibilidad del modelo, en metros.
delta_alpha_1 = x_mod_1/pi           % Error asociado al parámetro flexural que modifica el error del
                                     % modelo de estructura superior de la litosfera.
g = 9.81                             % Aceleración de la gravedad, en m/s^2.
rho_m = 3300                         % Densidad del manto, en kg/m^3.
rho_w = 1030                         % Densidad del agua, en kg/m^3.
E = 1*10^11                          % Módulo de Young, en Pa.
coef_Poisson = 0.25                  % Coeficiente de Poisson.
syms alpha                           % Variable simbólica
m = 1- coef_Poisson^2
D_1 = (alpha_1^4*g*(rho_m-rho_w))/4  % Rigidez flexural, en N*m
Te_1 = ((D_1*12*m)*E^(-1))^(1/3)     % Espesor elástico, en metros.
dTe_1 = diff(Te_1);                  % Derivada.
x1_1 = 43400                         % Localización del máximo levantamiento producido por la flexión o
                                     % bulge medido desde el origen del perfil, en metros
x2_1 = 61300                         % Localización de la carga Vo, en metros.
xb_1 = x2_1-x1_1;                    % Bulge medido desde el centro de la carga Vo.
alpha_1 = xb_1/pi                    % Mejor estimación del parámetro flexural alpha.
L = subs(dTe_1,alpha_1)                      % Sustitución del valor alpha en la derivada.
delta_Te_1 = L*delta_alpha_1                 % Error espesor elástico.

% Entre ambos montes submarinos.
x_mod_2 = 180                        % Valor que modifica la sensibilidad del modelo, en metros.
delta_alpha_2 = x_mod_2/pi           % Error asociado al parámetro flexural que modifica el error
                                     % del modelo de estructura superior de la litosfera.
g = 9.81                             % Aceleración de la gravedad, en m/s^2.
rho_m = 3300                         % Densidad del manto, en kg/m^3.
rho_w = 1030                         % Densidad del agua, en kg/m^3.
E = 1*10^11                          % Módulo de Young, en Pa.
coef_Poisson = 0.25                  % Coeficiente de Poisson.
syms alpha                           % Variable simbólica
m = 1- coef_Poisson^2
D_2 = (alpha_2^4*g*(rho_m-rho_w))/4  % Rigidez flexural, en N*m
```

```
Te_2 = ((D_2*12*m)*E^(-1))^(1/3)          % Espesor elástico, en metros.
dTe_2 = diff(Te_2);                       % Derivada.
x1_2 = 43400                      % Localización del máximo levantamiento producido por la flexión o
                                  % bulge medido desde el origen del perfil, en metros
x2_2 = 61300                              % Localización de la carga Vo, en metros.
xb_2 = x2_2-x1_2;                         % Bulge medido desde el centro de la carga Vo.
alpha_2 = xb_2/pi                         % Mejor estimación del parámetro flexural alpha.
L = subs(dTe_1,alpha_2)                   % Sustitución del valor alpha en la derivada.
delta_Te_2 = L*delta_alpha_2              % Error espesor elástico.

% Monte submarino localizado más al S.
x_mod_3 = 230                             % Valor que modifica la sensibilidad del modelo, en metros.
delta_alpha_3 = x_mod_3/pi        % Error asociado al parámetro flexural que modifica el error del
                                  % modelo de estructura superior de la litosfera.
g = 9.81                                  % Aceleración de la gravedad, en m/s^2.
rho_m = 3300                              % Densidad del manto, en kg/m^3.
rho_w = 1030                              % Densidad del agua, en kg/m^3.
E = 1*10^11                               % Módulo de Young, en Pa.
coef_Poisson = 0.25                       % Coeficiente de Poisson.
syms alpha                                % Variable simbólica
m = 1- coef_Poisson^2
D_3 = (alpha_3^4*g*(rho_m-rho_w))/4       % Rigidez flexural, en N*m
Te_3 = ((D_3*12*m)*E^(-1))^(1/3)          % Espesor elástico, en metros.
dTe_3 = diff(Te_3);                       % Derivada.
x1_3 = 43400                      % Localización del máximo levantamiento producido por la flexión o
                                  % bulge medido desde el origen del perfil, en metros
x2_3 = 61300                              % Localización de la carga Vo, en metros.
xb_3 = x2_3-x1_3;                         % Bulge medido desde el centro de la carga Vo.
alpha_3 = xb_3/pi                         % Mejor estimación del parámetro flexural alpha.
L = subs(dTe_1,alpha_3)                   % Sustitución del valor alpha en la derivada.
delta_Te_3 = L*delta_alpha_3              % Error espesor elástico.

% Perfil O-E monte submarino localizado más al N.
x_mod = 300                               % Valor que modifica la sensibilidad del modelo, en metros.
delta_alpha = x_mod/pi            % Error asociado al parámetro flexural que modifica el error del
                                  % modelo de estructura superior de la litosfera.
g = 9.81                                  % Aceleración de la gravedad, en m/s^2.
rho_m = 3300                              % Densidad del manto, en kg/m^3.
rho_w = 1030                              % Densidad del agua, en kg/m^3.
E = 1*10^11                               % Módulo de Young, en Pa.
coef_Poisson = 0.25                       % Coeficiente de Poisson.
syms alpha                                % Variable simbólica.
m = 1- coef_Poisson^2
D = (alpha^4*g*(rho_m-rho_w))/4           % Rigidez flexural, en N*m
Te = ((D*12*m)*E^(-1))^(1/3)              % Espesor elástico, en metros.
dTe = diff(Te);                           % Derivada.
x1 = 60000                        % Localización del máximo levantamiento producido por la flexión o
                                  % bulge medido desde el origen del perfil, en metros.
x2 = 86500                                % Localización de la carga Vo, en metros.
xb = x2-x1;                               % Bulge medido desde el centro de la carga Vo.
alpha = xb/pi                             % Mejor estimación del parámetro flexural alpha.
L = subs(dTe,alpha)                       % Sustitución del valor alpha en la derivada.
delta_Te = L*delta_alpha                  % Error espesor elástico.

% Perfil O-E monte submarino localizado más al S.
x_mod = 140                               % Valor que modifica la sensibilidad del modelo, en metros.
delta_alpha = x_mod/pi            % Error asociado al parámetro flexural que modifica el error del
                                  % modelo de estructura superior de la litosfera.
g = 9.81                                  % Aceleración de la gravedad, en m/s^2.
rho_m = 3300                              % Densidad del manto, en kg/m^3.
```

```
rho_w = 1030                    % Densidad del agua, en kg/m^3.
E = 1*10^11                     % Módulo de Young, en Pa.
coef_Poisson = 0.25             % Coeficiente de Poisson.
syms alpha                      % Variable simbólica.
m = 1- coef_Poisson^2
D = (alpha^4*g*(rho_m-rho_w))/4 % Rigidez flexural, en N*m
Te = ((D*12*m)*E^(-1))^(1/3)    % Espesor elástico, en metros.
dTe = diff(Te);                 % Derivada.
x1 = 62000                      % Localización del máximo levantamiento producido por la flexión o
                                % bulge medido desde el origen del perfil, en metros.
x2 = 95000                      % Localización de la carga Vo, en metros.
xb = x2-x1;                     % Bulge medido desde el centro de la carga Vo.
alpha = xb/pi                   % Mejor estimación del parámetro flexural alpha.
L = subs(dTe,alpha)             % Sustitución del valor alpha en la derivada.
delta_Te = L*delta_alpha        % Error espesor elástico.
```

% Volcán Kilimanjaro

```
%  Perfil N-S
x_mod = 50                      % Valor que modifica la sensibilidad del modelo, en metros.
delta_alpha = x_mod/pi          % Error asociado al parámetro flexural que modifica el error del
                                % modelo de estructura superior de la litosfera.
g = 9.81                        % Aceleración de la gravedad, en m/s^2.
rho_m = 3300                    % Densidad del manto, en kg/m^3.
rho_c = 2735                    % Densidad de la corteza, en kg/m^3.
E = 1*10^11                     % Módulo de Young, en Pa.
coef_Poisson = 0.25             % Coeficiente de Poisson.
syms alpha                      % Variable simbólica.
m = 1- coef_Poisson^2
D = (alpha^4*g*(rho_m-rho_c))/4 % Rigidez flexural, en N*m
Te = ((D*12*m)*E^(-1))^(1/3)    % Espesor elástico, en metros.
dTe = diff(Te);                 % Derivada.
x1 = 30000                      % Localización del máximo levantamiento producido por la flexión o
                                % bulge medido desde el origen del perfil, en metros.
x2 = 166500                     % Localización de la carga Vo, en metros.
xb = x2-x1;                     % Bulge medido desde el centro de la carga Vo.
alpha = xb/pi                   % Mejor estimación del parámetro flexural alpha.
L = subs(dTe,alpha)             % Sustitución del valor alpha en la derivada.
delta_Te = L*delta_alpha                % Error espesor elástico.

%  Perfil NO-SE
x_mod = 210                     % Valor que modifica la sensibilidad del modelo, en metros.
delta_alpha = x_mod/pi          % Error asociado al parámetro flexural que modifica el error del
                                % modelo de estructura superior de la litosfera.
g = 9.81                        % Aceleración de la gravedad, en m/s^2.
rho_m = 3300                    % Densidad del manto, en kg/m^3.
rho_c = 2735                    % Densidad de la corteza, en kg/m^3.
E = 1*10^11                     % Módulo de Young, en Pa.
coef_Poisson = 0.25             % Coeficiente de Poisson.
syms alpha                      % Variable simbólica.
m = 1- coef_Poisson^2
D = (alpha^4*g*(rho_m-rho_c))/4 % Rigidez flexural, en N*m
Te = ((D*12*m)*E^(-1))^(1/3)    % Espesor elástico, en metros.
dTe = diff(Te);                 % Derivada.
x1 = 81000                      % Localización del máximo levantamiento producido por la flexión o
                                % bulge medido desde el origen del perfil, en metros.
x2 = 197000                     % Localización de la carga Vo, en metros.
xb = x2-x1;                     % Bulge medido desde el centro de la carga Vo.
alpha = xb/pi                   % Mejor estimación del parámetro flexural alpha.
L = subs(dTe,alpha)             % Sustitución del valor alpha en la derivada.
delta_Te = L*delta_alpha        % Error espesor elástico.
```

PUBLICACIONES
Pd
DE DEFENSA

GOBIERNO
DE ESPAÑA

MINISTERIO
DE DEFENSA

SUBSECRETARÍA DE DEFENSA
SECRETARÍA GENERAL TÉCNICA
SUBDIRECCIÓN GENERAL
DE PUBLICACIONES
Y PATRIMONIO CULTURAL